

ÉCOLE DOCTORALE

MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL

*Année 2006-2007*

N° B.U. :

Thèse de DOCTORAT

*Diplôme délivré conjointement par  
L'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes*

Spécialité : GENIE MECANIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

**Andri ANDRIYANA**

le 7 novembre 2006  
à l'École Centrale de Nantes

TITRE

DEFINITION D'UNE NOUVELLE GRANDEUR PREDICTIVE POUR LA DUREE DE VIE EN FATIGUE  
DES MATERIAUX ELASTOMERES

JURY

|               |                                                        |                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Président :   | André CHRYSOCHOOS                                      | Professeur, Université de Montpellier II, Montpellier                                                                                                                                                                        |
| Rapporteurs : | Gérard A. MAUGIN<br>Lucien LAIARINANDRASANA            | Directeur de Recherche CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Paris<br>Chargé de Recherche, HDR, Ecole Nationale Supérieure des Mines, Paris                                                                                |
| Examineurs :  | Jean-Claude GRANDIDIER<br>Franck MOREL<br>Erwan VERRON | Professeur, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, Poitiers<br>Maître de Conférences, HDR, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Angers<br>Maître de Conférences, HDR, Ecole Centrale de Nantes |

---

Directeur de thèse : Erwan VERRON

Laboratoire : Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique, Ecole Centrale de Nantes. BP 92101, 44321 Nantes - France

Co-encadrant : -

Laboratoire : -

N° ED 0367xxx



- To my beloved Mom and Dad -

*Say (O Muhammad to mankind) : "If the ocean were ink to write out the words of my Lord (science), surely the sea would be exhausted before the words of my Lord would be finished, even if We added another ocean for its aid"*

(The Holy Quran : Al-Kahf, 109)



# Acknowledgements

The road has been rather long, not to mention somewhat winding.

Over the years it has been my good fortune to encounter many people who have given me more of their time, companionship, professional and personal help, and above all : patience than was perhaps warranted by my seeming determination to indefinitely position the deadline for finishing this dissertation at “next year” .

I would first of all like to thank my supervisor, Professor Erwan Verron. He not only gave me the scientific support and supervision that a student can expect from his professor, but he also allowed, encouraged and challenged me to achieve my full potential. His ideas, his research, and especially his unique brand of enthusiasm form the bedrock on which much of this dissertation was built. Without those I would never have made it this far.

I am very much grateful to Professor Gérard A. Maugin and Dr. Lucien Laiarinandrasana for accepting to be *rapporteur* of this dissertation. Professor André Chrysochoos, Professor Jean-Claude Grandidier and Dr. Franck Morel for accepting to participate among members of the jury committee.

Professor Arnaud Poitou, with whom I had so many fruitful discussions, a person I often ran to whenever I was lost. Professor Guillaume Racineux and Dr. Bertrand Huneau for all those precious advices.

There are friends in the lab whom I would specifically like to thank for the support they have given me over the years. My roommates JB, Youssef and Grégory for all our discussions and for being such a good friend, Yosra for the support and for all our time together, and Guillaume for greatly reducing the burden of  $\text{\LaTeX}$ . I won't forget, of course, François, Jelmer and Arthur for our discussions.

A list that, alas, has far too many names on it to mention separately is that of all the lecturers, co-workers and group members I have worked, talked, and lunched with over the years. My gratitude goes out to all these colleagues.

Moving towards more personal acknowledgements, I would like to thank towards all my family in France (the Aucher, the Riou and the de Saint Jores) for their personal help and great moments during my stay in Nantes. My compatriots for their support, friendship and patience, and for the fact that they never gave in to the temptation to make fun of my perennial dissertation delays and woes, well hardly ever !!. A special *shout-out* to my eternal friend Nana for her everlasting support.

I am, of course, particularly indebted to my parents and my sisters for their monumental, unwavering support and encouragement on all fronts. Without them none of this would have been even remotely possible.

Nantes, November 2006  
Andri Andriyana



# Introduction générale

Les matériaux élastomères occupent actuellement une place importante dans de nombreux secteurs de l'industrie automobile comme par exemple les pièces anti-vibratoires ou les pneumatiques. Dans tous ces secteurs, la prévision de la durée de vie en fatigue des pièces est un domaine de recherche qui fait l'objet d'un fort regain d'intérêt ces dernières années, notamment pour les pièces anti-vibratoires telles que les supports-moteur, les supports d'échappement, . . . Dans ce domaine, les équipementiers et les constructeurs automobiles souhaitent acquérir des outils prédictifs permettant d'étudier la durabilité des pièces lors de leur conception. En effet, la réduction des délais de conception des véhicules couplée à des cahiers des charges de plus en plus sévères rend indispensable l'utilisation d'outils numériques permettant de diminuer la part des essais expérimentaux qui sont souvent longs et coûteux. Dans ce contexte, il est nécessaire d'élaborer des outils prédictifs pertinents adaptés aux matériaux élastomères, matériaux dont le comportement complexe reste encore assez mal connu. Nombre d'études proposent des approches visant à prédire les phénomènes macroscopiques de rupture et de fatigue dans les élastomères de manière phénoménologique. Ces travaux utilisent le plus souvent des résultats bien connus pour les matériaux métalliques et les étendent au cas des élastomères. Si ces approches permettent parfois d'obtenir des résultats exploitables, il est cependant évident que le développement de critères de fin de vie systématiques nécessitent la compréhension puis la prise en compte des phénomènes de dégradation propres aux élastomères.

Dans cette optique, l'objectif de la présente thèse est de développer une grandeur mécanique permettant de prédire la durée de vie en fatigue multiaxiale des matériaux élastomères. Nous ne parlerons pas ici de *critère* de fin de vie, mais seulement de *grandeur prédictive*. En effet, une fois la grandeur prédictive établie, des critères pourront être proposés en comparant cette grandeur à des données expérimentales qui seront dépendantes du caoutchouc considéré. Les qualités requises par cette grandeur prédictive peuvent être résumées comme suit :

- Elle doit être exprimée en termes de grandeurs de la mécanique des milieux continus et non de la mécanique de la rupture, ceci afin de prédire les zones propices à l'apparition de fissures de fatigue sur des modèles *sains*, i.e. ne contenant pas de défaut macroscopique ;
- Elle doit être motivée par la physique des phénomènes mis en jeu lors de l'endommagement en fatigue du matériau, i.e. qu'elle doit s'attacher à modéliser les phénomènes d'endommagement en fatigue à l'échelle microscopique ;
- Elle doit être théoriquement bien fondée ;
- Elle doit être implantables dans des codes de calcul éléments finis sans induire de temps de calcul trop importants ;
- Finalement, elle doit être indépendante du mode de déformation afin d'assurer ses performances pour des chargements multiaxiaux.

Ces qualités constituent les préoccupations principales de l'étude présentée dans ce document.

Le mémoire est divisé en deux parties et six chapitres. La première partie est dédiée aux rappels nécessaires à l'étude ; elle est composée de trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à une présentation succincte des caractéristiques physiques et mécaniques des élastomères. Nous nous intéressons plus particulièrement au comportement mécanique sous chargement cyclique. De plus, différentes lois de comportement élastiques non-linéaires seront présentées. Le second chapitre propose une étude bibliographique de la fatigue des élastomères aux échelles macroscopique et microscopique. Puisque les pièces anti-vibratoires perdent leur fonctionnalité après l'apparition de fissures macroscopiques qui se traduit par une perte de raideur globale de la pièce, notre travail se concentre exclusivement sur l'étude de l'initiation de fissures de fatigue. Les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature seront discutés. Sans dévoiler ici le détail de cet état de l'art, nous montrerons que l'endommagement en fatigue des élastomères est dû à la croissance de micro-défauts préexistants au sein du matériau. A la lumière de ces observations, le premier enjeu du développement d'une grandeur prédictive sera donc la prise en compte de ce phénomène. Dans le troisième chapitre, les grandeurs prédictives de la durée de vie en fatigue des élastomères proposées dans la bibliographie seront rappelées. Il convient de souligner que même si la plupart de ces grandeurs satisfont au traitement des résultats d'essais uniaxiaux, leur généralisation aux chargements multiaxiaux pose problème. Ce problème est partiellement résolu par Mars [2002] qui a introduit récemment une nouvelle grandeur, la *densité d'énergie de fissuration* (Cracking Energy Density, CED, en anglais). Celle-ci vise à prédire la croissance des micro-défauts qui peuplent le matériau, c'est-à-dire qu'elle est fondée sur les observations expérimentales mentionnées précédemment. Cependant, le formalisme théorique utilisé par l'auteur nous apparaît discutable, ce qui conduit au développement d'une nouvelle grandeur.

Ce développement fait l'objet de la seconde partie du mémoire qui est composée de trois chapitres. Afin d'inscrire l'approche de Mars dans un cadre théorique rigoureux, nous pensons que la mécanique configurationnelle introduite par Eshelby [1951] est l'outil approprié. Ainsi, le quatrième chapitre du mémoire propose une étude bibliographique de la mécanique configurationnelle. Les notions de force et de contrainte configurationnelles seront présentées. Puisque notre grandeur sera construite sur la base du tenseur des contraintes configurationnelles, une partie de ce chapitre sera consacrée à l'interprétation physique des composantes de ce tenseur. Nous présenterons dans le cinquième chapitre le développement théorique de notre grandeur prédictive. Tout d'abord, la formulation dans le cas élastique sera proposée en exploitant les propriétés du tenseur des contraintes configurationnelles. Ensuite, l'extension de cette approche au cas inélastique sera présentée. Finalement, une méthode de cumul permettant de prendre en compte l'histoire du chargement multiaxial sera discutée. Le dernier chapitre du mémoire présente les premiers résultats obtenus avec notre grandeur prédictive. Afin de vérifier le bien-fondé de cette théorie, des données expérimentales de la bibliographie seront utilisées ; les résultats obtenus démontreront l'efficacité de notre approche notamment pour unifier les résultats multiaxiaux en fatigue.



# Table des matières

|          |                                                                  |           |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b> | <b>Généralités et état de l'art</b>                              | <b>11</b> |
| <b>1</b> | <b>Généralités sur les élastomères</b>                           | <b>13</b> |
| 1.1      | Préambule . . . . .                                              | 13        |
| 1.2      | Caractéristiques physique et mécanique . . . . .                 | 14        |
| 1.2.1    | Description moléculaire . . . . .                                | 14        |
| 1.2.2    | Comportement mécanique des élastomères . . . . .                 | 17        |
| 1.2.2.1  | Élasticité caoutchoutique . . . . .                              | 17        |
| 1.2.2.2  | Comportement sous chargement cyclique . . . . .                  | 19        |
| 1.2.2.3  | Cristallisation sous contrainte . . . . .                        | 20        |
| 1.2.3    | Quelques modèles hyperélastiques . . . . .                       | 21        |
| 1.2.3.1  | Approche physique moléculaire . . . . .                          | 22        |
| 1.2.3.2  | Approche phénoménologique . . . . .                              | 23        |
| 1.2.3.3  | Relation contrainte-déformation . . . . .                        | 24        |
| 1.3      | Conclusion . . . . .                                             | 25        |
| <b>2</b> | <b>État de l'art sur la fatigue des élastomères</b>              | <b>27</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .                                           | 27        |
| 2.2      | Observation à l'échelle macroscopique . . . . .                  | 28        |
| 2.2.1    | Quelques résultats d'essais de la bibliographie . . . . .        | 28        |
| 2.2.1.1  | Expériences de Cadwell et al. (1940) . . . . .                   | 28        |
| 2.2.1.2  | Expériences de Roberts et Benzies (1977) . . . . .               | 30        |
| 2.2.1.3  | Expériences d'André et al. (1999) . . . . .                      | 32        |
| 2.2.1.4  | Expériences de Mars (2001) . . . . .                             | 33        |
| 2.2.1.5  | Expériences d'Abraham et al. (2005) . . . . .                    | 35        |
| 2.2.1.6  | Expériences d'Ostoja-Kuczynski (2005) et Le Cam (2005) . . . . . | 36        |
| 2.2.1.7  | Autres expériences . . . . .                                     | 37        |
| 2.2.2    | Critères expérimentaux de fin de vie . . . . .                   | 39        |
| 2.3      | Observation à l'échelle microscopique . . . . .                  | 40        |
| 2.3.1    | Amorçage . . . . .                                               | 40        |
| 2.3.1.1  | Morphologie et distribution des micro-défauts . . . . .          | 40        |
| 2.3.1.2  | Origine de l'amorçage microscopique . . . . .                    | 42        |
| 2.3.2    | Propagation des micro-défauts . . . . .                          | 43        |
| 2.4      | Conclusion . . . . .                                             | 44        |

|           |                                                            |           |
|-----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3</b>  | <b>Grandeurs prédictives classiques</b>                    | <b>45</b> |
| 3.1       | Introduction                                               | 45        |
| 3.2       | Descriptions des grandeurs prédictives de la bibliographie | 46        |
| 3.2.1     | Elongation principale maximale                             | 46        |
| 3.2.2     | Contrainte principale maximale                             | 46        |
| 3.2.3     | Densité d'énergie de déformation                           | 46        |
| 3.2.4     | Densité d'énergie de fissuration                           | 47        |
| 3.3       | Conclusion                                                 | 49        |
| <b>II</b> | <b>Construction d'une nouvelle grandeur prédictive</b>     | <b>51</b> |
| <b>4</b>  | <b>Mécanique configurationnelle</b>                        | <b>53</b> |
| 4.1       | Introduction                                               | 53        |
| 4.2       | Forces configurationnelles                                 | 54        |
| 4.2.1     | Force sur un défaut                                        | 55        |
| 4.2.2     | Taux de restitution d'énergie                              | 58        |
| 4.3       | Equation du mouvement purement matérielle                  | 59        |
| 4.3.1     | Cas élastique                                              | 60        |
| 4.3.2     | Extension au cas inélastique                               | 62        |
| 4.4       | Contrainte configurationnelle                              | 63        |
| 4.4.1     | Définition géométrique                                     | 63        |
| 4.4.2     | Interprétation physique de composantes                     | 65        |
| 4.4.3     | Applications de la contrainte configurationnelle           | 66        |
| <b>5</b>  | <b>Construction d'une nouvelle grandeur prédictive</b>     | <b>67</b> |
| 5.1       | Introduction                                               | 67        |
| 5.2       | Construction générale                                      | 68        |
| 5.2.1     | Cas élastique                                              | 70        |
| 5.2.2     | Cas inélastique                                            | 73        |
| 5.2.3     | Prise en compte de l'histoire de chargement                | 77        |
| 5.2.3.1   | Cumul en élasticité                                        | 78        |
| 5.2.3.2   | Cumul en inélasticité                                      | 79        |
| 5.3       | Conclusion                                                 | 81        |
| <b>6</b>  | <b>Premiers résultats</b>                                  | <b>83</b> |
| 6.1       | Introduction                                               | 83        |
| 6.2       | Étude des cas simples                                      | 84        |
| 6.2.1     | Simulation des essais simples                              | 84        |
| 6.2.2     | Influence de la biaxialité                                 | 86        |
| 6.3       | Comparaison avec des résultats expérimentaux               | 88        |
| 6.3.1     | Essais de Roberts et Benzies (1977)                        | 88        |
| 6.3.1.1   | Mise en équations                                          | 88        |
| 6.3.1.2   | Résultats et discussion                                    | 89        |
| 6.3.2     | Essais de Mars (2001)                                      | 94        |
| 6.3.2.1   | Mise en équations                                          | 94        |

|                                   |                                                                |            |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------|------------|
| 6.3.2.2                           | Résultats et discussion . . . . .                              | 97         |
| 6.3.3                             | Prédiction du renforcement de la durée de vie . . . . .        | 106        |
| 6.3.3.1                           | Loi de comportement . . . . .                                  | 106        |
| 6.3.3.2                           | Calcul des grandeurs prédictives au cours d'un cycle . . . . . | 108        |
| 6.3.3.3                           | Résultats et discussion . . . . .                              | 111        |
| 6.4                               | Rôle de l'inhomogénéité . . . . .                              | 113        |
| 6.4.1                             | Modélisation de l'inhomogénéité . . . . .                      | 114        |
| 6.4.2                             | Mise en équations . . . . .                                    | 115        |
| 6.4.3                             | Résultats et discussion . . . . .                              | 117        |
| 6.5                               | Conclusion . . . . .                                           | 125        |
| <b>Référence Bibliographiques</b> |                                                                | <b>128</b> |



**Première partie**  
**Généralités et état de l'art**



# Chapitre 1

## Généralités sur les élastomères

### Sommaire

---

|            |                                               |           |
|------------|-----------------------------------------------|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Préambule</b>                              | <b>13</b> |
| <b>1.2</b> | <b>Caractéristiques physique et mécanique</b> | <b>14</b> |
| 1.2.1      | Description moléculaire                       | 14        |
| 1.2.2      | Comportement mécanique des élastomères        | 17        |
| 1.2.3      | Quelques modèles hyperélastiques              | 21        |
| <b>1.3</b> | <b>Conclusion</b>                             | <b>25</b> |

---

### 1.1 Préambule

L'objectif du présent chapitre est de présenter succinctement les caractéristiques physiques et mécaniques des élastomères. Dans ce mémoire, les mots *caoutchouc* et *élastomère* sont interchangeables.

La terme *caoutchouc* vient de mot indien *caa-o-chu* qui signifie *bois qui pleure*. Le caoutchouc naturel largement utilisé dans l'industrie est un polyisoprène naturel provenant de l'arbre du *Hevea brasiliensis*, originaire du bassin de l'Amazone. Cet arbre est implanté notamment en Asie du Sud-Est afin de bénéficier des conditions climatiques particulières : une température moyenne de 25°C et une pluviométrie annuelle comprise entre 1800 et 2500 mm (Agora [2006]). Lors de son expédition géographique en Amérique du Sud en 1736, Charles-Marie de La Condamine découvre cette substance élastique et la ramène en occident. Ses propriétés extraordinaires telles que l'imperméabilité et l'élasticité ont attiré les européens qui tentèrent pendant de nombreuses années, mais en vain, de reproduire les articles résistants à l'eau, e.g. chaussures, vestes et capes. Pour mettre fin au monopole brésilien, l'explorateur britannique Henry Wickham, en 1876, rapporta du Brésil environ 70000 graines *Hevea brasiliensis* pour établir les premières plantations dans d'autres régions tropicales. Aujourd'hui, la Thaïlande, l'Indonésie et la Malaisie sont les plus gros producteurs du caoutchouc naturel au monde.

L'occupation de l'Asie du Sud-Est par les japonais pendant la seconde guerre mondiale a conduit les États Unis à mener des recherches sur le caoutchouc synthétique pour remplacer le caoutchouc naturel (Kausch et al. [2001]). On retiendra parmi les principaux caoutchoucs

synthétiques utilisés : les SBR, IR, BR et EPDM. En 2003, les caoutchoucs synthétiques représente presque 70% de la production mondiale du caoutchouc. Toutefois, dans le domaine de l'antivibratoire automobile qui nous intéresse, le caoutchouc naturel est utilisé dans la production de 90% des pièces (Chagnon [2003]).

## 1.2 Caractéristiques physique et mécanique

### 1.2.1 Description moléculaire

Le caoutchouc naturel est un polyisoprène naturel obtenu par polymérisation de molécules à base organique identiques appelées monomères dont la structure moléculaire est présentée sur la figure 1.1. Une macromolécule est généralement composé de milliers de monomères d'isoprène. A l'état complètement étirée, elle mesure à peu près de 3  $\mu\text{m}$  (Carrega [2000]). A une échelle intermédiaire, dans l'état non-déformé, le matériau peut être vu comme une pelote statistique où les chaînes sont dans une position très repliée et où les points de jonction (réticulation et enchevêtrement) forment des nœuds entre les chaînes. La représentation symbolique d'une chaîne et du réseau élastomère est illustrée par la figure 1.2.

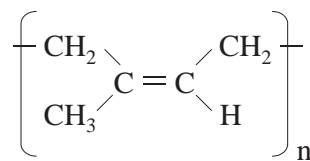


Fig. 1.1: Macromolécule du caoutchouc naturel.

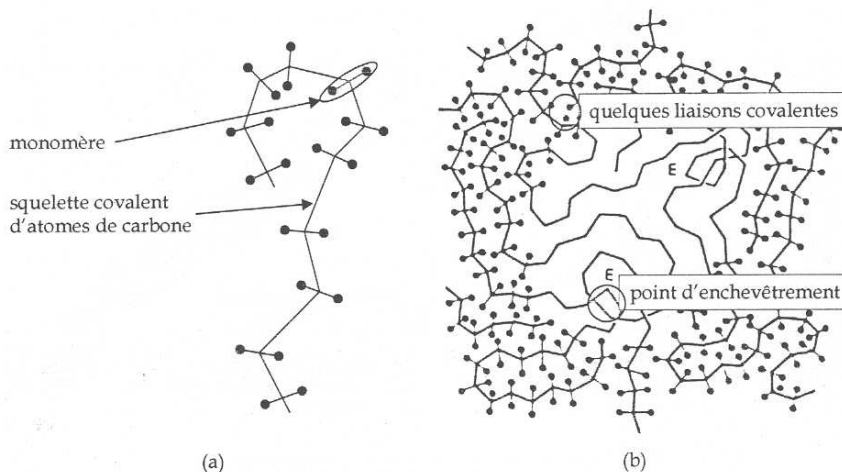
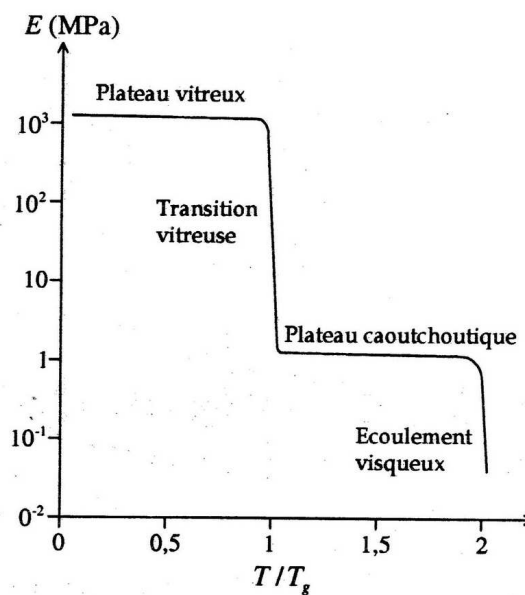


Fig. 1.2: Représentation schématique (a) d'une chaîne, (b) du réseau élastomère d'après Ashby et Jones [1991]. Les chaînes sont liées entre elles par des liaisons covalentes et des points d'enchevêtrement, ce qui est caractéristique de l'état caoutchoutique.



Comme tous les polymères, les élastomères sont sensibles à la température. Ils peuvent admettre deux états : l'état vitreux où le niveau d'énergie thermique est trop bas pour permettre la mobilité moléculaire, qui se traduit par une rigidité élevée, et l'état caoutchoutique où le matériau est beaucoup plus souple car la mobilité moléculaire est aisée. La frontière entre ces deux états est définie par l'existence d'une température de transition vitreuse,  $T_g$ . Une des manifestations les plus spectaculaires de la transition vitreuse est la variation importante des propriétés mécaniques qui survient aux environs de  $T_g$ . La figure 1.3 illustre l'évolution de la raideur d'un polymère en fonction de sa température d'utilisation réduite, i.e. adimensionnalisée par rapport à  $T_g$ . La température de transition vitreuse des élastomères est comprise entre  $-100^\circ\text{C}$  et  $-50^\circ\text{C}$  selon les spécificités du matériau considéré. Pour donner un ordre de grandeur, le module d'Young des élastomères se situe entre 1 et 100 MPa (Verron [2003]).



**Fig. 1.3:** Evolution du module d'élasticité d'un polymère en fonction de la température normalisée à sa température de transition vitreuse.

L'élastomère à l'état brut n'est pas un matériau prêt à l'emploi. Il nécessite diverses opérations de préparation avant de pouvoir être utilisé industriellement. En effet, il se présente sous la forme d'un fluide très visqueux, se déchire facilement et ne retrouve pas ses dimensions initiales une fois déformé. Même à la température ambiante, les chaînes sont capables de s'écouler facilement les unes par rapport aux autres. En 1839 à Springfield, Massachusetts, Charles Goodyear, montra que la cuisson du caoutchouc en présence de soufre lui confère une consistance solide. Cette cuisson appelée vulcanisation consiste à établir des liaisons covalentes fortes entre les différentes chaînes moléculaires (points de réticulation) afin d'empêcher le glissement entre elles (figure 1.4). Ainsi, le comportement mécanique des élastomères est influencé par le nombre de points de réticulation créés pendant la vulcanisation. La figure 1.5 présente la dépendance des propriétés mécaniques à la densité de réticulation.

Même après vulcanisation, le caoutchouc naturel ne possède pas de propriétés mécaniques intéressantes. Pour améliorer ses performances, les formulateurs ajoutent des charges au

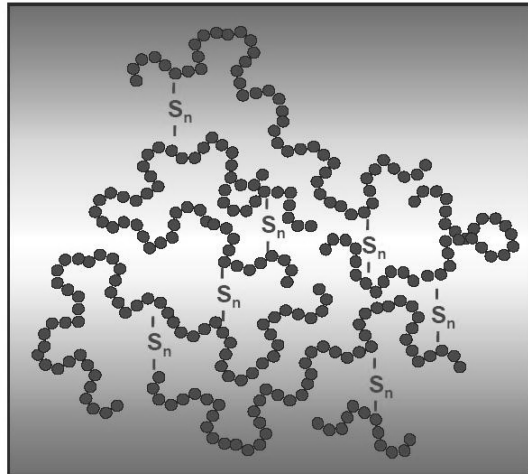


Fig. 1.4: Vulcanization au soufre.

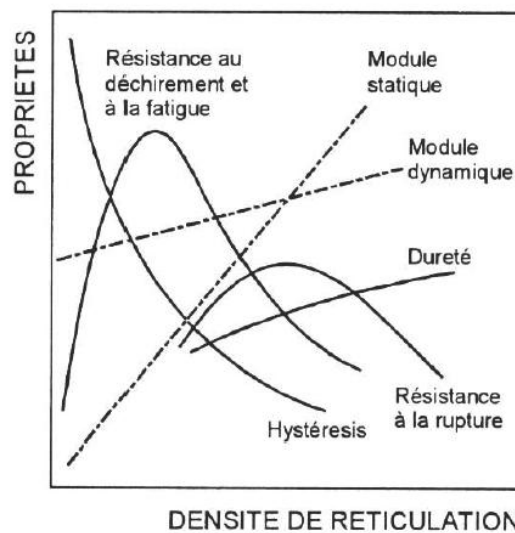


Fig. 1.5: Effet de densité de réticulation sur des propriétés mécaniques (Bouchereau [1997]).

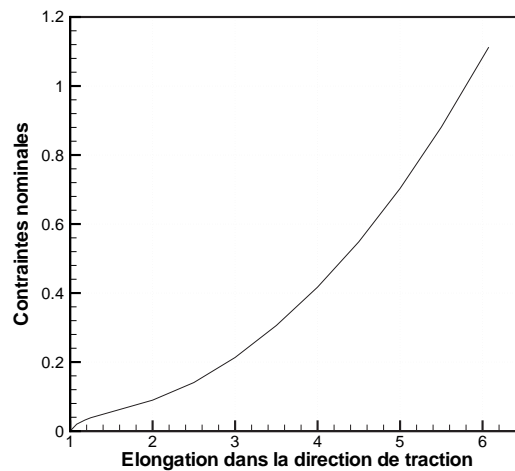
matériau. Les charges les plus couramment utilisées sont le noir de carbone, la silice, les kaolins et la craie. De nombreuses études sur le rôle des charges dans le renforcement des propriétés mécaniques de caoutchouc ont été menées (Dannenberg [1975, 1982], Rigbi [1980], Ambacher *et al.* [1991]), mais la nature exacte des liaisons entre les charges et la matrice n'est pas complètement déterminée. On évoque généralement l'action des forces d'adhésion entre les charges et la matrice qui réduisent la mobilité moléculaire (Saintier [2000]).

## 1.2.2 Comportement mécanique des élastomères

Dans l'objectif de rappeler le comportement mécanique des élastomères, des résultats d'essai mécanique disponibles dans la littérature sont présentés. Par souci de brièveté, nous avons décidé de rappeler seulement quelques résultats qui sont importants pour la suite. Le lecteur peut se reporter aux travaux de [Chagnon \[2003\]](#) et [Verron \[2003\]](#) pour une description plus complète.

### 1.2.2.1 Élasticité caoutchoutique

Une des propriétés qui distingue les élastomères des autres matériaux est leur capacité à supporter les très grandes déformations élastiques. Celle-ci est illustrée par la courbe 1.6. Cette propriété est une conséquence de la structure moléculaire des élastomères. Aux faibles élongations ( $\lambda = 1 - 1,25$ ), les chaînes se déplient et l'énergie apporté sert à rompre des liaisons faibles. Ensuite, elles se désenchevêtrent et s'alignent dans la direction d'étirement ( $\lambda = 1,25 - 5$ ). Finalement, elles sont étendues, ce qui se traduit par un raidissement du matériau ( $\lambda > 5$ ).

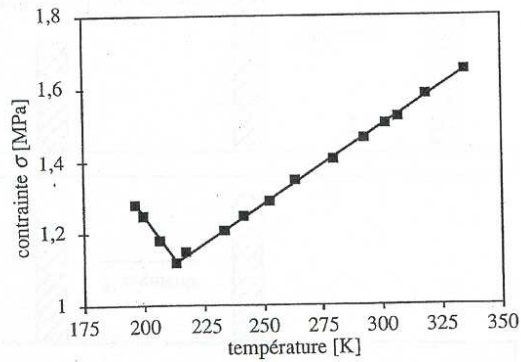


**Fig. 1.6:** Courbe de traction uniaxiale à rupture d'un élastomère. Élongation  $\lambda$  est définie par le rapport entre les longueurs déformée et non-déformée ([Chagnon \[2003\]](#)).

[Meyer et Ferri \[1935\]](#) ont montré que l'élasticité des caoutchoucs est essentiellement de nature entropique, i.e. directement liée à la diminution du nombre de conformations accessibles à ses molécules. Pour ce faire, ils ont réalisé des essais de traction uniaxiale sur un caoutchouc légèrement vulcanisé et maintenu à une élongation fixe ( $\lambda = 4, 5$ ) à différentes températures. En supposant que la déformation subie par le caoutchouc se fait sans la variation du volume, ils ont établi une relation linéaire entre la force de traction,  $f$ , et la température,  $T$  :  $f(T) = \alpha T$  où  $\alpha$  est une constante (figure 1.7). En comparant ces observations avec l'équation thermodynamique :

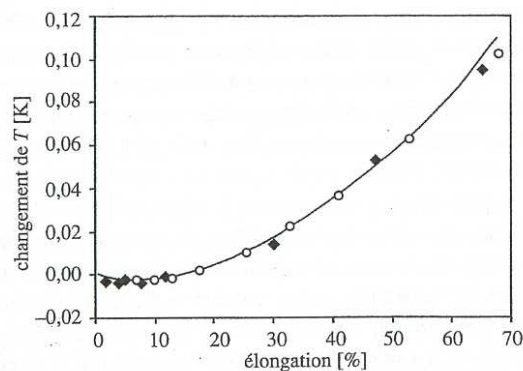
$$f = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_T - T \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_T \quad (1.1)$$

qui lie la force exercée sur l'éprouvette, étirée de  $dx$  en conservant son volume, à son énergie interne  $U$ , son entropie  $S$  et sa température  $T$ , il apparaît que l'élasticité est presque entièrement d'origine entropique. Aux températures inférieures à 213K ( $-60^{\circ}\text{C}$ ), qui correspond à la transition vitreuse, le comportement du caoutchouc change. Ce changement peut être attribué à la contraction thermique (Kausch *et al.* [2001]). Les origines entropiques de l'élasticité caou-



**Fig. 1.7:** Courbe de contrainte à élancement ( $\lambda = 4.5$ ) pour différentes températures (Meyer et Ferri [1935] d'après Treloar [1975]).

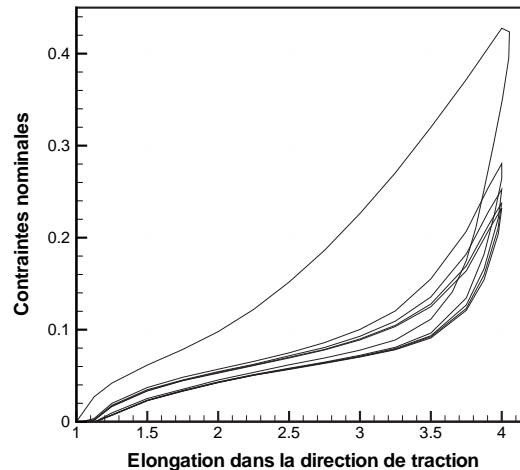
choutique se manifestent aussi par l'augmentation de la température lorsqu'un caoutchouc est étiré rapidement, i.e. dans des conditions approximativement adiabatiques. Ce phénomène qui a été étudié par Gough (1805) et Joule (1859) est présenté sur la figure 1.8. Il est parfois appelé l'effet Gough-Joule. Cependant, pour des niveaux de déformation assez faibles, la température diminue avec l'élancement. Par conséquent, puisque la dilatation thermique d'un élastomère est positive, en l'absence de déformation, la longueur d'éprouvette augmente lorsque la température augmente. En revanche, pour des niveaux de déformation importants à contrainte constante, elle diminue avec la température. Ces deux effets opposés sont nommés l'inversion thermoélastique.



**Fig. 1.8:** Courbe d'évolution de la température en fonction d'élancement (Joule 1859 d'après Treloar [1975]).

### 1.2.2.2 Comportement sous chargement cyclique

Un essai de traction cyclique a été réalisé : la courbe contrainte-élongation obtenue pour 5 cycles à déplacement imposé est présentée sur la figure 1.9. Deux phénomènes importants peuvent être mis en évidence :



**Fig. 1.9:** Courbe de traction uniaxiale cyclique à  $\lambda = 1$  jusqu'à  $\lambda = 4$  pour les cinq premiers cycles (Chagnon [2003]).

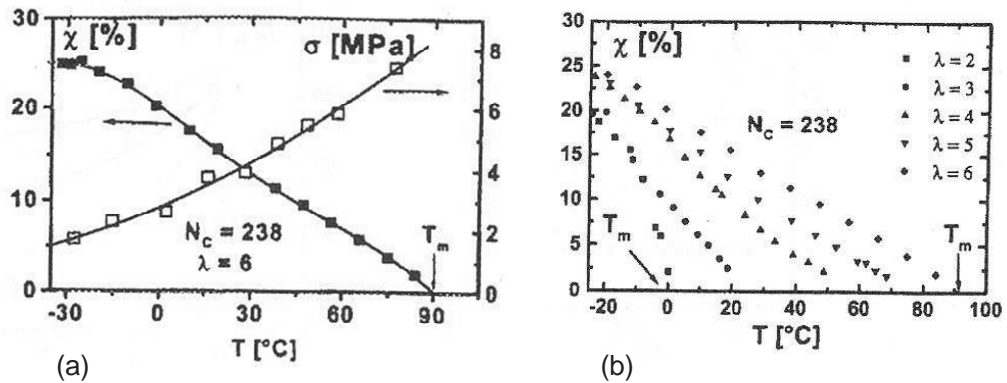
- **L'hystérésis** : les trajets de charge et de décharge sont différents. Ceux-ci apparaissent quel que soit le cycle considéré. Lion [1997] a constaté que la taille et la forme de la boucle d'hystérésis dépendent du niveau de sollicitation appliqué. Si la forme de cette boucle reste quasiment inchangée, sa taille évolue de façon significative au cours des cycles. En effet, celle-ci est très importante lors des deux premiers cycles avant de se stabiliser pour un nombre important de cycles. L'hystérésis qui correspond à l'énergie dissipée au cours d'un cycle est importante car elle influence de façon prépondérante la rupture, notamment en fatigue (Payne et Whittaker [1971]). Plus un matériau est capable de dissiper de l'énergie, plus la quantité d'énergie nécessaire pour rompre ce matériau sera importante. A ce jour, aucune interprétation unanime n'a été proposée pour expliquer ce phénomène. Bergström et Boyce [1998] imputent l'hystérésis au comportement viscoélastique. La conséquence d'une telle hypothèse serait que les trajets de charge et de décharge doivent être confondus lorsque la vitesse de sollicitation est extrêmement lente. Pour Lion [1996], l'origine de l'hystérésis est plutôt le comportement viscoplastique du matériau. Il existerait donc une boucle d'hystérésis limite ce qui n'a jamais été vérifié. Récemment, Toki *et al.* [2000] et Trabelsi *et al.* [2003a] ont montré que l'hystérésis du caoutchouc naturel peut être reliée à la cristallisation sous contrainte (SIC). Celle-ci est présentée plus en détails dans la section suivante.
- **La perte de raideur** : Pour une élongation donnée, le niveau de contrainte pendant la phase de chargement décroît au cours des cycles. On peut noter une très forte perte de raideur entre les deux premiers cycles de chargement. La perte de raideur entre les cycles suivants est nettement plus faible. Ce phénomène a été étudié de manière complète par Mullins [1948, 1969] qui lui a laissé son nom : *effet Mullins*. A ce jour, les mécanismes

physiques à l'origine de l'effet Mullins n'ont toujours pas été identifiés. En général, deux approches peuvent être citées dans la littérature : soit l'effet Mullins est associé à la viscoélasticité du matériau (Govindjee et Simo [1992], Drozdov et Dorfmann [2001]), soit l'effet Mullins est indépendant de la viscoélasticité. Dans ce cas, il est défini comme un phénomène d'endommagement qui se traduit soit par la perte de raideur au cours des cinq premiers cycles (Miehe [1995], Klüppel et Schramm [2000]), soit par la perte de raideur entre les deux premiers cycles (De Souza Neto *et al.* [1994], Marckmann *et al.* [2002], Chagnon *et al.* [2004]). Finalement, il convient de souligner que l'effet Mullins est un phénomène quasiment réversible sur le long terme (de l'ordre de 90% de la raideur sont recouverts en 150 jours). Dans la bibliographie, il apparaît que ce recouvrement est complet pour certains matériaux mais seulement partiel pour d'autres, en fonction de la composition de l'élastomère (Mullins [1969]).

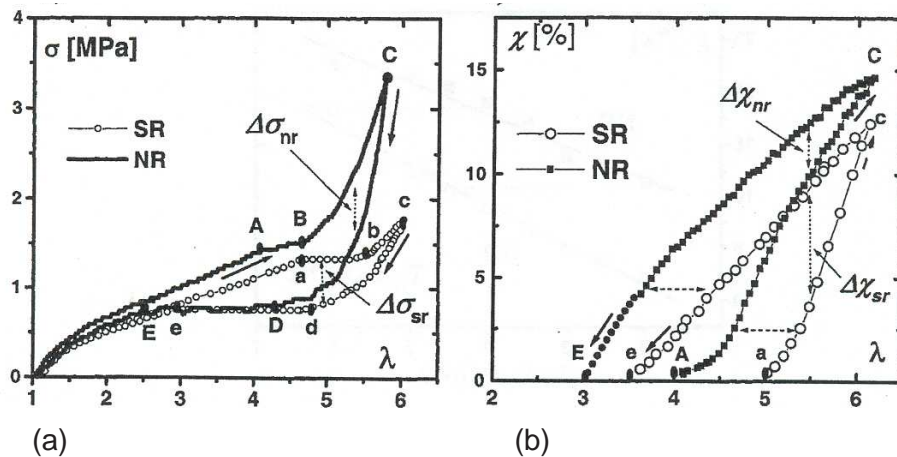
### 1.2.2.3 Cristallisation sous contrainte

A température ambiante et aux faibles déformations, les élastomères se trouvent dans l'état amorphe. Toutefois, une phase semi-cristalline se crée sous l'action de la température ou de la déformation. L'existence de la phase cristalline dans les élastomères dépend de la température de fusion des cristallites,  $T_m$ , qui est une fonction de la température et de la déformation. Sous sollicitation mécanique, pour qu'il puisse y avoir cristallisation, il faut que l'orientation des chaînes moléculaires induise une température  $T_m$  supérieure à la température d'essai (Kausch *et al.* [2001]). La figure 1.10 montre l'évolution de la contrainte et de la cristallinité d'un caoutchouc naturel en fonction de la température lors d'essais de relaxation pour différents niveaux de déformation (Trabelsi *et al.* [2003a]). Les contraintes enregistrées sont celles stabilisées (figure 1.10(a)), i.e. mesurées à la fin de la phase de relaxation pour chaque température à  $\lambda = 6$ . On peut observer que la contrainte et la cristallinité évoluent linéairement avec la température mais de façons opposées. A 20°C et 70°C, les premières phases cristallines apparaissent à  $\lambda = 3$  et  $\lambda = 5$  respectivement (figure 1.10(b)).

Le fait que le caoutchouc naturel cristallise sous l'action de la déformation (ou contrainte) a des conséquences sur son comportement mécanique sous chargement cyclique. Si Lion [1996] et Bergström et Boyce [1998] ont lié l'origine de l'hystérésis à l'aspect visqueux de matériau, pour Toki *et al.* [2000] et Trabelsi *et al.* [2003a,b] l'hystérésis peut être expliquée par la cristallisation sous contrainte. Un essai de traction cyclique a été réalisé sur les caoutchoucs naturel (NR) et synthétique (SR). L'évolution de la contrainte ainsi que la cristallinité au cours de l'essai sont enregistrées. Les résultats sont présentés sur la figure 1.11 (Trabelsi *et al.* [2003b]). Lorsque le matériau est étiré, la contrainte augmente avec la déformation. La cristallisation s'initie aux points  $A(\lambda_A)$  pour le NR et  $a(\lambda_a)$  pour le SR. Dans la gamme  $\lambda_B - \lambda_C$  ( $\lambda_b - \lambda_c$  pour le SR), la contrainte croît de façon significative et la cristallinité est quasi-proportionnelle au niveau de déformation. Pendant la phase de déchargement, la cristallinité diminue et disparaît à  $\lambda_E$  ( $\lambda_e$ ). Le chemin de contrainte rejoint celui du chargement à ces niveaux de déformation, ce qui conduit Toki *et al.* [2000] et Trabelsi *et al.* [2003a,b] à conclure que l'origine de l'hystérésis n'est pas la viscoélasticité, mais plutôt la cristallisation sous contrainte. Pour aller dans ce sens, mentionnons que Chagnon [2003] a réalisé un essai de cisaillement cyclique pour des vitesses de déformations variant de 0,001 à 0,33 s<sup>-1</sup>. L'auteur a démontré que la boucle d'hystérésis reste quasiment inchangée dans ces gammes des vitesses ce qui justifie cette hypothèse. Toutefois, à



**Fig. 1.10:** (a) Evolution de la cristallinité et de la contrainte stabilisée (équilibre) en fonction de la température pour  $\lambda = 6$ . (b) Evolution de la cristallinité en fonction de la température pour différents niveaux de déformation. Pour chaque niveau de déformation,  $T_m$  est obtenue en extrapolant la courbe jusqu'à  $\chi = 0$ . Ici,  $N_c$  représente le nombre de monomères entre deux points de réticulation (Trabelsi *et al.* [2003a]).



**Fig. 1.11:** (a) Courbe élongation-contrainte des élastomères (NR et SR) à la température ambiante ( $T = 23^\circ\text{C}$ ). (b) Evolution de la cristallinité en fonction de l'élongation pour les mêmes matériaux (Trabelsi *et al.* [2003a]).

notre connaissance il n'y a aucune explication sur l'origine de l'hystérésis pour des élastomères qui ne cristallisent pas sous contrainte.

### 1.2.3 Quelques modèles hyperélastiques

Cette section a pour objectif de présenter brièvement les deux approches utilisées dans la construction de lois de comportement hyperélastique. Ici, nous nous contentons uniquement

de quelques lois simples. Le lecteur peut se reporter aux travaux de Verron [2003] pour une étude plus complète concernant lois de comportement hyperélastiques.

A la lumière des résultats de Meyer et Ferri [1935], l'énergie de déformation,  $W$ , d'un élastomère et sa variation d'entropie sont reliées par :

$$W = -T \Delta S \quad (1.2)$$

Afin de construire la loi de comportement hyperélastique, il faut tout d'abord caractériser la fonction d'énergie de déformation. Pour cela, il existe deux approches différentes dans la littérature : physique et phénoménologique. Les formulations physiques s'appuient sur deux étapes distinctes : la construction de la distribution des conformations possibles d'une chaîne moléculaire et ensuite l'intégration des contributions individuelles des chaînes. La fonction d'énergie de déformation est alors déterminée au travers de l'équation (1.2). Dans l'approche phénoménologique, la formulation de l'énergie de déformation se fait à l'aide d'un cadre mathématique bien défini sans se soucier des interprétations moléculaires.

### 1.2.3.1 Approche physique moléculaire

Revenons à l'équation (1.2). Il a été mentionné que la variation d'entropie peut être calculée à partir de la somme des variations d'entropie de chaque chaîne individuelle, notée  $s$ . La mécanique statistique permet de décrire l'entropie de chaque chaîne individuelle pour le nombre d'états de conformations spatiales possibles de la chaîne, i.e. la fonction de distribution des écarts entre les extrémités d'une chaîne (Mayer et Mayer [1940]). Puisqu'une chaîne moléculaire est classiquement représentée par  $N$  segments inextensibles de longueur  $l$  (Doi [1996]), cette distribution dépend de la répartition spatiale des  $N$  segments de la chaîne. Celle-ci est donnée par :

$$s = k \ln [p(x, y, z) dx dy dz] \quad (1.3)$$

où  $k = 8.31\text{J/mol.K}$  est la constante de Boltzmann et  $p(x, y, z)$  est la probabilité qu'une chaîne fixée à un point donné ait son autre extrémité au voisinage d'un point  $P$  dans un volume élémentaire  $dx dy dz$ . La difficulté réside maintenant dans la formulation de  $p(x, y, z)$ . En première approximation, il est considéré que  $p(x, y, z)$  dépend uniquement de la distance entre les deux extrémités de la chaîne,  $r$ . En supposant que l'écart entre extrémités est faible,  $p(x, y, z)$  s'exprime par une fonction gaussienne (Guth et Mark [1934]) :

$$p(x, y, z) = \frac{b^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp(-b^2(x^2 + y^2 + z^2)) \quad \text{ou encore} \quad p(r) = \frac{b^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} \exp(-b^2 r^2) \quad (1.4)$$

avec  $b^2 = 3/2Nl^2$ . Introduisons cette probabilité dans l'équation (1.3), nous obtenons :

$$s_G = k \ln \left( dx dy dz \frac{b^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} \right) - kb^2 r^2 \quad (1.5)$$

Pour passer de la réponse d'une chaîne à celle du réseau, Treloar [1943] adopte l'hypothèse de *déformation affine* :

- les fluctuations statistiques des points de jonction (réticulation et enchevêtrement) autour de leur position moyenne sont négligées ;



- le vecteur liant les extrémités d'une chaîne suit la déformation locale du milieu continu. Ceci permet d'établir l'expression du modèle classique Néo-Hookéen (Flory [1944]) :

$$W = \frac{1}{2}nkT(I_1 - 3) \quad (1.6)$$

La conséquence de l'hypothèse affine est immédiate : le modèle ne peut reproduire que le comportement des élastomères soumis à des petites déformations. Aux déformations plus élevées, cette approximation n'est plus acceptable.

Pour surmonter ces problèmes, Kuhn et Gr $\ddot{u}$ n [1942] ont établi la fonction de distribution non-gaussienne des conformations des chaînes courtes ou fortement étirées. Celle-ci prend en compte le fait que la longueur maximale d'une chaîne sous chargement est sa longueur entièrement dépliée, soit  $Nl$ . La probabilité des écarts entre les extrémités est donnée par :

$$p(r) = \exp \left\{ N \left[ \frac{r}{Nl} \beta + \ln \left( \frac{\beta}{\sinh \beta} \right) \right] \right\} \quad (1.7)$$

où  $\beta = \mathcal{L}^{-1} \left[ r/\sqrt{Nl} \right]$  et  $\mathcal{L}$  est la fonction de Langevin :

$$\mathcal{L}(\beta) = \coth(\beta) - \frac{1}{\beta} \quad (1.8)$$

L'entropie d'une chaîne non-gaussienne se déduit simplement de l'équation (1.7) :

$$s_{\text{NG}} = C - Nk \left[ \frac{r}{Nl} \beta + \ln \left( \frac{\beta}{\sinh \beta} \right) \right] \quad (1.9)$$

L'intégration de l'entropie de chaque chaîne non-gaussienne dans un réseau aléatoire est beaucoup plus complexe que dans le cas de la distribution gaussienne (Verron [2003]). Différentes simplifications sont proposées. James et Guth [1943] supposent que pour une densité de chaînes  $n$ ,  $n/3$  chaînes sont orientées dans chacune des directions principales de déformation, hypothèse qui conduit à l'élaboration du modèle 3-chaînes. Au lieu d'utiliser trois directions principales, Flory et Rehner [1943] proposent d'adopter quatre directions préférentielles alors qu'Arruda et Boyce [1993] proposent huit directions. Ces deux derniers correspondent aux modèles 4-chaînes et 8-chaînes respectivement. Pour le modèle 8-chaînes, la densité de l'énergie de déformation est donnée par :

$$W = C_R N \left[ \frac{\lambda_{\text{chain}}}{\sqrt{N}} \beta + \ln \frac{\beta}{\sinh \beta} \right] \quad (1.10)$$

avec  $\lambda_{\text{chain}} = \sqrt{I_1/3}$ .  $C_R$ ,  $N$  sont les paramètres matériels et  $I_1$  est le premier invariant du tenseur des dilatations. Finalement, il convient de noter que Wu et van der Giessen [1993] ont établi une distribution statistique des chaînes dans toutes les directions de l'espace.

### 1.2.3.2 Approche phénoménologique

Le modèle phénoménologique le plus classique et le plus utilisé est dû à Mooney [1940]. La fonction d'énergie de déformation s'écrit sous la forme d'une fonction linéaire des deux premiers invariants des tenseurs des dilatations de Cauchy-Green :

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (1.11)$$

Ce modèle est couramment utilisé grâce à sa simplicité mathématique et ses bonnes performances pour des déformations modérées. Lorsque  $C_2 = 0$ , le modèle Néo-Hookéen est retrouvé ce qui justifie physiquement l'existence du premier terme du modèle. Rivlin [1948] étend cette formulation en proposant d'écrire l'énergie de déformation sous la forme d'un développement en série sur les variables  $(I_1 - 3)$  et  $(I_2 - 3)$  :

$$W = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j \quad (1.12)$$

Pour utiliser ce développement, différents auteurs ont proposé des troncatures. Un récapitulatif des principales troncatures est proposé dans le tableau 1.1.

| Auteurs                                             | Modèles                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Isihara <i>et al.</i> [1951]                        | $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{01}(I_2 - 3)$                                                                    |
| Biderman [1958]                                     | $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3)$                                                |
| Tschoegl [1971]                                     | $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3)$                     |
| James et Green [1975]<br>James <i>et al.</i> [1975] | $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3)$                     |
| Haines et Wilson [1979]                             | $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3)$ |
| Yeoh [1990]                                         | $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3$                                                                  |
| Bechir <i>et al.</i> [2002]                         | $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 + C_{01}(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2$                            |

**Tab. 1.1:** Différents modèles fondés sur une troncature de la série de Rivlin (Chagnon [2003]).

Certains auteurs dont Ogden [1972] préfèrent d'écrire l'énergie de déformation en terme d'élongations principales :

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (1.13)$$

avec  $\mu_n$  et  $\alpha_n$  sont les constantes matérielles.

### 1.2.3.3 Relation contrainte-déformation

Différentes formulations de l'énergie de déformation ont été présentées brièvement. Il reste maintenant à construire une relation entre la contrainte et la déformation. Les matériaux hyperélastiques sont caractérisés par l'existence d'une énergie de déformation  $W$  dépendant de l'état de déformation  $\mathbf{F}$  (Beatty [1987]) :

$$W = W(\mathbf{F}) \quad (1.14)$$

qui vérifie :

$$W(\mathbf{I}) = 0 \quad \text{et} \quad W(\mathbf{F}) > 0 \quad (1.15)$$

avec  $\mathbf{F}$  est le tenseur du gradient de la transformation. Le principe d'objectivité permet d'écrire  $W$  en fonction des tenseurs des dilatations de Cauchy-Green  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  ou  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$  (Sidoroff [1982]) :

$$W = W(\mathbf{B}) = W(\mathbf{C}) \quad (1.16)$$

L'hypothèse d'isotropie du matériau impose à  $W$  d'être une fonction scalaire isotrope de  $\mathbf{C}$  ou  $\mathbf{B}$ . Ainsi elle peut être écrite comme une fonction des invariants de  $\mathbf{C}$  ou de  $\mathbf{B}$  :

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (1.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{C}) \\ I_2 &= \frac{1}{2} [(\text{tr}(\mathbf{B}))^2 - \text{tr}(\mathbf{B}^2)] = \frac{1}{2} [(\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] \\ I_3 &= \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{C}) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Les élastomères sont souvent supposés incompressibles, ainsi les déformations se font sans variation du volume ( $I_3 = 1$ ) et l'énergie de déformation ne dépend que des deux premiers invariants précédents :  $W = W(I_1, I_2)$ . Finalement, la loi d'état s'écrit simplement :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B} \quad (1.19)$$

ou :

$$\boldsymbol{\pi} = -p \mathbf{F}^{-T} + 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \quad (1.20)$$

ou :

$$\mathbf{S} = -p \mathbf{C}^{-1} + 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad (1.21)$$

où  $p$  est une pression hydrostatique qui doit être déterminée en utilisant des équations d'équilibre.  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\pi}$  et  $\mathbf{S}$  représentent les contraintes de Cauchy, Piola-Kirchhoff I et Piola-Kirchhoff II respectivement.

### 1.3 Conclusion

Au cours de ce chapitre, les caractéristiques physiques et mécaniques des élastomères ont été discutées. Il a été observé que les élastomères présentent un comportement mécanique caractérisé par leur capacité à supporter de grandes déformations. Ils sont également caractérisés par l'existence de phénomènes complexes tels que l'hystérésis, l'effet Mullins, la viscoélasticité ou encore la cristallisation sous contrainte dont les mécanismes physiques n'ont toujours pas été identifiés. Dans le prochain chapitre, nous nous attacherons plus particulièrement au comportement en fatigue des élastomères.



# Chapitre 2

## État de l'art sur la fatigue des élastomères

### Sommaire

---

|                                                       |           |
|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2.1 Introduction</b>                               | <b>27</b> |
| <b>2.2 Observation à l'échelle macroscopique</b>      | <b>28</b> |
| 2.2.1 Quelques résultats d'essais de la bibliographie | 28        |
| 2.2.2 Critères expérimentaux de fin de vie            | 39        |
| <b>2.3 Observation à l'échelle microscopique</b>      | <b>40</b> |
| 2.3.1 Amorçage                                        | 40        |
| 2.3.2 Propagation des micro-défauts                   | 43        |
| <b>2.4 Conclusion</b>                                 | <b>44</b> |

---

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre une étude bibliographique non-exhaustive sur la fatigue des élastomères aux échelles macroscopique et microscopique est présentée. D'un point de vue général, la fatigue des élastomères est abordée de la même manière que celle des métaux. Deux approches sont classiquement adoptées pour prédire de la durée de vie : l'approche en initiation de fissure et l'approche en propagation de fissure ([Mars et Fatemi \[2002\]](#)). Dans l'approche en initiation, il est supposé que le matériau est macroscopiquement parfait sans défaut (non-fissuré). La durée de vie est déterminée à partir de l'histoire de certaines grandeurs mécaniques (contrainte, déformation, énergie) ou de leurs combinaisons en postulant que celles-ci sont intrinsèques à la fatigue des élastomères. L'approche en propagation de fissure s'intéresse particulièrement à une fissure de position et de taille connues qui existe déjà au sein de matériau afin de suivre sa croissance. Les observations expérimentales montrent que la plupart de pièces anti-vibratoires automobiles qui nous intéressent perdent leur fonctionnalité suite à l'apparition de fissures macroscopiques en surface ([Le Cam \[2005\]](#)). C'est pourquoi l'approche en propagation est mal adaptée à notre étude puisqu'elle ne prend pas en compte la phase d'amorçage de fissure. Ainsi, l'état de l'art qui suit se concentre exclusivement sur l'approche en initiation, i.e. la fatigue des pièces élastomères initialement non-fissurées et vierges de toute sollicitation

mécanique. Le lecteur peut se reporter aux travaux de Rivlin et Thomas [1953], Gehman et Clifford [1954], Thomas [1958], Greensmith [1964], Lindley [1972], Busfield *et al.* [1997] ou encore Bathias *et al.* [1997] pour l'approche en propagation.

Dans un premier temps, différents essais et résultats déjà obtenus dans la bibliographie sur la fatigue uniaxiale et multiaxiale à l'échelle macroscopique sont brièvement présentés. Trois définitions différentes de la fin de vie utilisées dans la littérature sont discutées. Il convient de noter qu'il est difficile de comparer ces résultats quantitativement puisque les protocoles d'essais et les éprouvettes utilisées sont différents. Dans un deuxième temps, quelques observations expérimentales relatives à la fatigue des élastomères à l'échelle microscopiques sont exploitées, cette étude est primordiale afin d'introduire une nouvelle grandeur prédictive qui est à la fois pertinente dans le cas de chargements multiaxiaux, bien fondée théoriquement et motivée par les phénomènes physiques mis en jeu lors de l'initiation et de la propagation de fissures. Nous nous intéressons plus particulièrement aux résultats expérimentaux de Le Cam [2005]. Il convient de souligner qu'à notre connaissance, à part ces travaux, il n'existe pas d'études dédiées aux mécanismes microscopiques d'amorçage et de propagation de fissures de fatigue dans les élastomères. Les rares études qui s'intéressent à l'origine physique de l'amorçage de fissure (Robisson [2000], Saintier [2000]) traitent de la nature chimique et de la localisation des défauts. Néanmoins, le nombre de cycles à partir duquel les micros-défauts commencent à se propager n'est pas abordé.

▷ **Remarque :**

*La présente étude bibliographique est fortement inspirée de celle, beaucoup plus complète, proposée par Le Cam dans sa thèse (Le Cam [2005]).*

## 2.2 Observation à l'échelle macroscopique

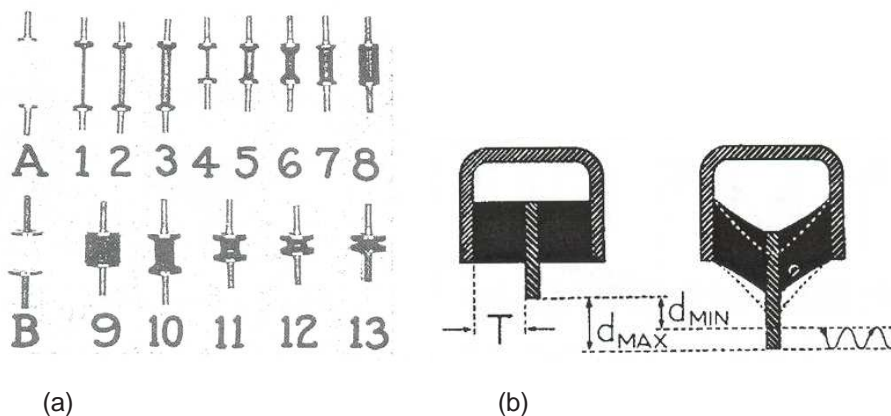
L'étude de la fatigue des élastomères s'inspire de celle des métaux. Les essais de fatigue sont réalisés soit en déplacement (angle dans des essais de torsion) ou bien en effort (couple dans des essais de torsion) imposés. Pour les élastomères, le mode d'asservissement de l'essai (en déplacement ou en effort) influe sur la réponse obtenue. L'asservissement en déplacement imposé engendre un phénomène de relaxation cyclique et l'asservissement en effort imposé engendre un phénomène de fluage cyclique. Les essais de fatigue d'élastomères sont souvent menés en déplacement imposé pour des raisons pratiques (Le Cam [2005]). La section suivante s'attache à exploiter quelques résultats expérimentaux de la bibliographie. Ces résultats sont importants puisqu'ils nous permettront de vérifier l'aptitude de notre grandeur prédictive dont la construction générale sera présentée dans la deuxième partie de ce mémoire.

### 2.2.1 Quelques résultats d'essais de la bibliographie

#### 2.2.1.1 Expériences de Cadwell *et al.* (1940)

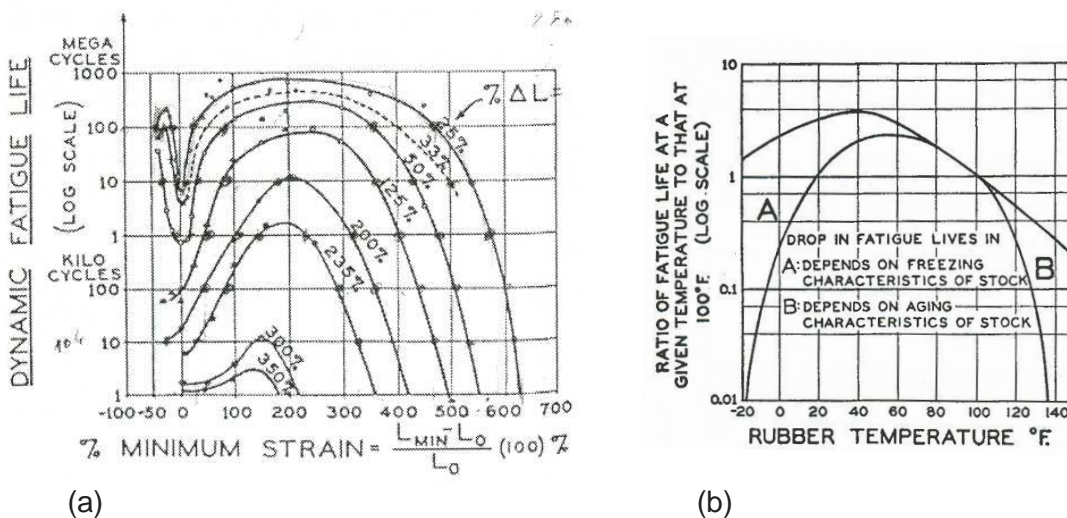
Cadwell *et al.* [1940] sont les premiers à réaliser des études expérimentales de fatigue uniaxiale et multiaxiale des élastomères. Pour la fatigue uniaxiale, les auteurs s'interrogent sur la durée de vie du caoutchouc naturel chargé de noirs de carbone soumis à une sollicitation en déplacement imposée. Pour cela, les éprouvettes cylindriques, dont les formes sont

présentées sur la figure 2.1(a), sont testées en compression répétée, traction-compression, traction répétée et traction-traction. Trois fréquences différentes de sollicitation sont considérées



**Fig. 2.1:** Éprouvette des essais de fatigue utilisé par Cadwell *et al.* [1940] : (a) cylindriques et (b) double cisaillement.

selon la gamme de déplacement de manière à éviter l'auto-échauffement : 180 cycles par minute (3 Hz), 660 cycles par minute (11 Hz) et 3600 cycles par minute (60 Hz). Les auteurs définissent la durée de vie par le nombre de cycles nécessaire à la rupture totale de l'éprouvette. La figure 2.2(a) montre l'évolution de la durée de vie en fonction de la déformation minimale pour différentes valeurs d'amplitude de déformation. Notons que ces résultats sont obtenus sans tenir compte de l'effet de la fréquence et de la température. En observant cette figure,



**Fig. 2.2:** Résultats obtenus par Cadwell *et al.* [1940] : (a) Durée de vie en fonction de déformation minimale pour différents amplitudes de déformation, (b) effet de la température sur la durée de vie.

quelques phénomènes peuvent être mis en évidence :

- Pour une valeur de déformation minimale donnée, la durée de vie diminue avec l'amplitude de déformation ;
- Pour une valeur d'amplitude de déformation donnée, la durée de vie augmente avec la déformation minimale jusqu'à une certaine valeur, au-delà de laquelle la durée de vie diminue. Ceci implique qu'une pièce chargée en traction-traction a une durée de vie plus importante qu'une pièce chargée en traction répétée à même amplitude de chargement (renforcement de la durée de vie) ;
- Quel que soit le niveau d'amplitude de déformation, la durée de vie en traction passe par un minimum pour une déformation minimale à peu près nulle (légèrement positive) ;
- En traction-traction, la durée de vie atteint sa valeur maximale au niveau de déformation minimal  $\approx 200\%$ . Celui-ci est indépendante de l'amplitude de déformation sauf pour des niveaux d'amplitude importants.

Remarquons que les mêmes tendances ont été observées lorsque la durée de vie est définie par le nombre de cycles nécessaire pour qu'une petite fissure apparaisse en surface.

Pour étudier l'effet de la température sur la durée de vie, des essais sont menés à bien pour différentes températures. Les résultats sont présentés sur la figure 2.2(b). Ici, les durées de vie sont normalisées à leur valeur à la température 100°F (38°C). Il a été observé que la durée de vie augmente fortement avec la température dans la gamme qui se situe entre -20 à 60°F (-30 à 15°C), puis diminue fortement au-delà de 60°F (15°C). A haute température, les auteurs attribuent, sans préciser, ce phénomène au vieillissement thermique. Pour [Le Cam \[2005\]](#), celui-ci peut peut-être s'expliquer en tenant compte du fait que la température réelle de la pièce, surtout à cœur, est très supérieure à la température d'essai et peut donc être suffisante pour provoquer la disparition des cristallites, issues de la cristallisation sous contrainte, sous chargement.

[Cadwell et al. \[1940\]](#) ont également réalisé des essais de fatigue multiaxiale. Les auteurs utilisent des éprouvettes double cisaillement dont la forme est présentée sur la figure 2.1(b). L'objectif de ces essais est de déterminer si le phénomène du renforcement de la durée de vie est aussi observé dans le cas d'un chargement multiaxial. Neuf types de chargement sont envisagés (figure 2.3). Les éprouvettes sont sollicitées en cisaillement cyclique à amplitude constante de 50% pour trois niveaux de cisaillement minimal (-25%, 0% et 75%). Notons que les auteurs ne précisent pas la fréquence de sollicitation. Pour chaque type de chargement, les éprouvettes sont soumises à une déformation latérale statique de -12.5% (compression), 0% et 25% (traction). Les résultats, présentés sur la figure 2.3, montrent que le phénomène du renforcement de la durée de vie est aussi observé dans le cas de chargements multiaxiaux lorsqu'une précharge statique en traction est imposée. Finalement, il convient de noter que les auteurs n'ont pas essayé d'expliquer l'origine physique de ce renforcement.

### 2.2.1.2 Expériences de Roberts et Benzies (1977)

[Roberts et Benzies \[1977\]](#) réalisent des essais de traction uniaxiale et équibiaxiale cycliques. Pour cela, des éprouvettes de NR et SBR chargés ou non de noirs de carbone sont utilisées sous forme de lanières et de plaques fines pour la traction uniaxiale et équibiaxiale respectivement. Celles-ci sont sollicitées à température ambiante en déplacement imposé à des fréquences de 0,03 et 1,67 Hz en uniaxial et de 0,5 et 1,67 Hz en équibiaxial de manière à éviter l'auto-échauffement. Comme [Cadwell et al. \[1940\]](#), les auteurs définissent la durée de vie par le



| SHEAR CYCLE  | LATERAL STRAIN      |                     |                     |
|--------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|              | NONE                | 12½% COMPRESSION    | 25% EXTENSION       |
| -25% TO +25% | A<br><br>7-MILLION  | D<br><br>20-MILLION | G<br><br>12-MILLION |
| 0% TO 50%    | B<br><br>1-MILLION  | E<br><br>2-MILLION  | H<br><br>2-MILLION  |
| 75% TO 125%  | C<br><br>15-MILLION | F<br><br>2-MILLION  | I<br><br>40-MILLION |

Fig. 2.3: Durée de vie en fatigue multiaxiale obtenue par Cadwell *et al.* [1940].

nombre de cycles à la rupture totale de pièce. Les résultats sont présentés sur la figure 2.4 sous la forme de courbes de durée de vie en fonction de l'élongation maximale appliquée.

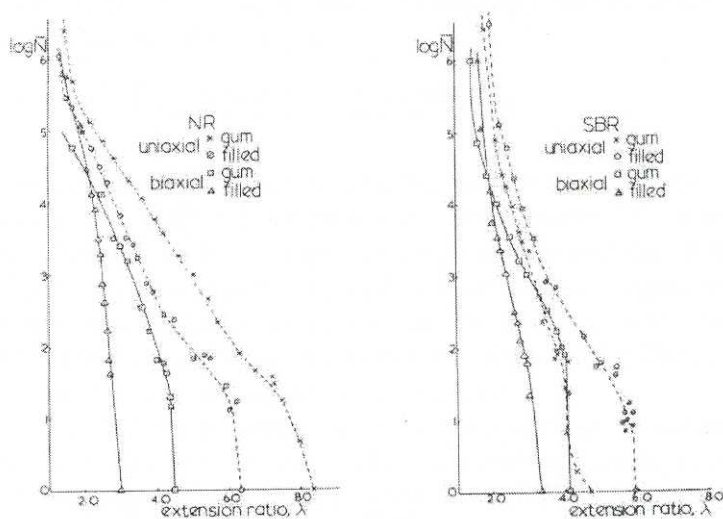


Fig. 2.4: Diagramme du nombre moyen de cycles à rupture en fonction de l'élongation maximale (Roberts et Benzies [1977]).

A partir de ces courbes, les auteurs tirent quelques conclusions :

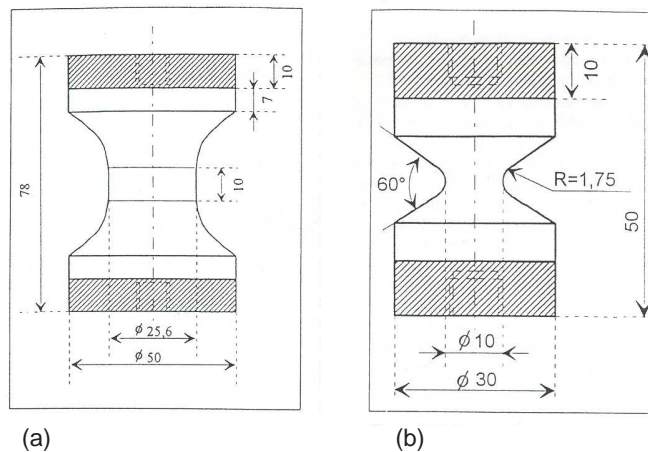
- De manière générale, pour une valeur d'élongation donnée, la durée de vie des caoutchoucs (que ce soit NR ou SBR) en traction uniaxiale est plus importante qu'en traction équibiaxiale sauf pour le SBR non-chargé pour lequel les courbes sont très proches ;
- La présence de charges de noirs de carbone dans le caoutchouc diminue la durée de vie pour une élongation donnée ;

- Lorsque la durée de vie est tracée en fonction de la densité d'énergie de déformation, la durée de vie en traction équibiaxiale est plus grande qu'en traction uniaxiale pour un même niveau de densité d'énergie de déformation.

Il est important de noter que les auteurs ne s'interrogent pas sur la pertinence des grandeurs (élongation et densité d'énergie de déformation) qu'ils ont choisies. Cependant, à la lumière de ces résultats, nous pouvons conclure que ni l'élongation maximale, ni la densité d'énergie de déformation ne sont pertinentes pour unifier les résultats en traction uniaxiale et équibiaxiale.

### 2.2.1.3 Expériences d'André et al. (1999)

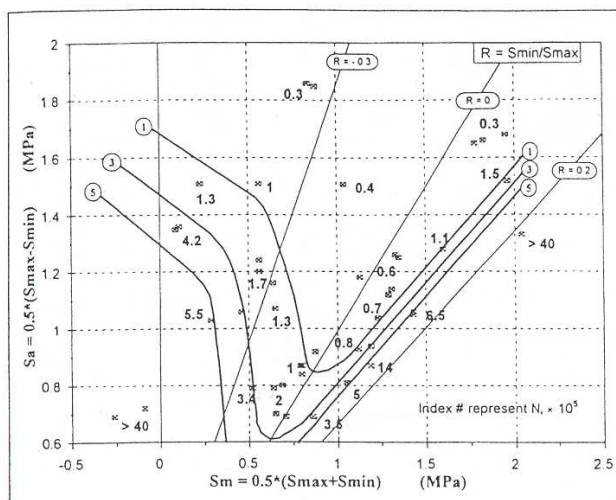
Aujourd'hui, le développement d'outils informatiques permet d'analyser les mesures expérimentales sur la base des grandeurs locales. [André et al. \[1999\]](#) utilisent la contrainte de Cauchy comme une grandeur prédictive de la durée de vie afin de construire un diagramme de Haigh. En utilisant des éprouvettes Diabolo et AE2 dont les géométries sont présentées sur la figure 2.5, ils réalisent des essais de fatigue uniaxiale et multiaxiale.



**Fig. 2.5:** Géométrie des éprouvette utilisées par [André et al. \[1999\]](#) pour les essais de fatigue : (a) Diabolo et (b) AE2.

Tout d'abord, des éprouvettes Diabolo (figure 2.5(a)) sont sollicitées en traction-compression et traction-traction à déplacement imposé à une fréquence de 1 Hz à la température ambiante. Pour une amplitude de déformation donnée, un phénomène de relaxation cyclique est observé. Ici, la durée de vie est définie par l'apparition d'une fissure de 1 mm en surface. Des calculs numérique (éléments finis) sont menés sur cette éprouvette afin de déterminer la valeur de la contrainte à l'endroit où la fissure apparaît. Ensuite, pour différents niveaux d'amplitude de déformation et déformation moyenne, les auteurs construisent un diagramme de Haigh qui est tracé en fonction de la contrainte moyenne et de l'amplitude de contrainte. Trois lignes d'isodurée de vie de  $1.10^5$ ,  $3.10^5$  et  $5.10^5$  cycles sont tracées et notées par 1, 3 et 5 respectivement sur la figure 2.6. A la lumière de ce diagramme, quelques remarques peuvent être proposées :

- De manière générale, l'augmentation de l'amplitude de contrainte conduit à la diminution de la durée de vie ;



**Fig. 2.6:** Diagramme de Haigh obtenu par [André et al. \[1999\]](#). Ici la durée de vie est tracée en fonction de l'amplitude de contrainte de Cauchy  $S_a$  et sa valeur moyenne  $S_m$ .

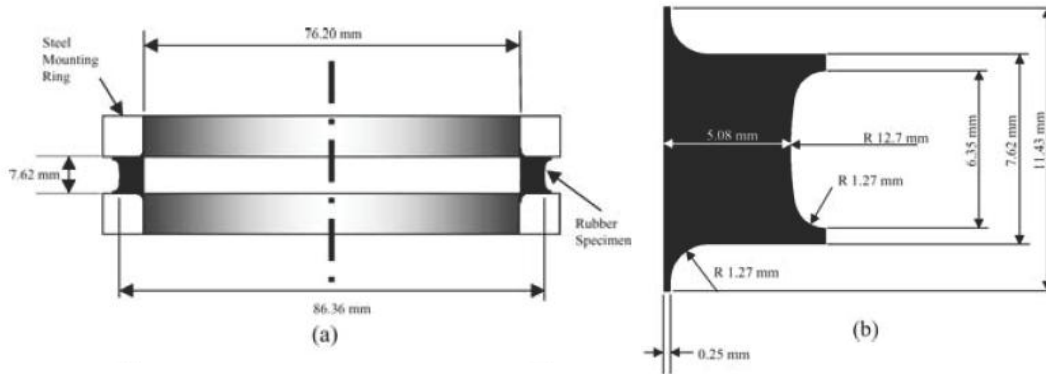
- Sous sollicitation de traction-compression, la durée de vie diminue avec l'augmentation de la contrainte moyenne pour une amplitude de contrainte donnée ;
- Pour des sollicitations de traction-traction, un renforcement de la durée de vie est observé, i.e. elle augmente avec la contrainte moyenne. Les auteurs attribuent ce renforcement à la cristallisation sous contrainte ;
- Pour un niveau d'amplitude de contrainte donné, la durée de vie atteint sa valeur minimale lorsque la contrainte moyenne nulle, i.e. dans le cas de traction répétée.

Pour étendre ces résultats, des essais de fatigue multiaxiale ont été réalisés sur des éprouvettes de type AE2 (figure 2.5(b)), dont l'une des particularités est de présenter, en traction uniaxiale, au centre un coefficient de triaxialité, défini par le rapport de la pression hydrostatique à la contrainte équivalente de Von Mises, plus élevée que l'éprouvette Diabolo. Ensuite, ils réalisent des essais de torsion sur ces éprouvettes. Les résultats de ces deux essais montrent qu'un critère de type de contrainte établi sur des résultats uniaxiaux est conservatif puisque pour un chargement axial local donné, la durée de vie est plus importante dans le cas de chargement multiaxial qu'uniaxial. Par ailleurs, en analysant l'angle des fissures apparues à la surface des éprouvettes, les auteurs montrent que ces fissures se développent perpendiculairement à la direction de la contrainte principale maximale. Alors, les auteurs proposent de modifier le diagramme de Haigh (figure 2.6) en remplaçant la contrainte de Cauchy par sa valeur principale maximale pour prendre en compte les résultats des chargements multiaxiaux.

#### 2.2.1.4 Expériences de Mars (2001)

Soixante ans après les travaux de [Cadwell et al. \[1940\]](#), [Mars \[2001\]](#) réalise différents essais de fatigue multiaxiale qui se révèlent les plus complets disponibles dans la bibliographie.

Dans son étude, l'auteur introduit une nouvelle géométrie d'éprouvette, formée par un anneau d'élastomère adhérisé à deux inserts métalliques comme le montre la figure 2.7. Ses dimensions finales sont optimisées par des calculs par élément finis.



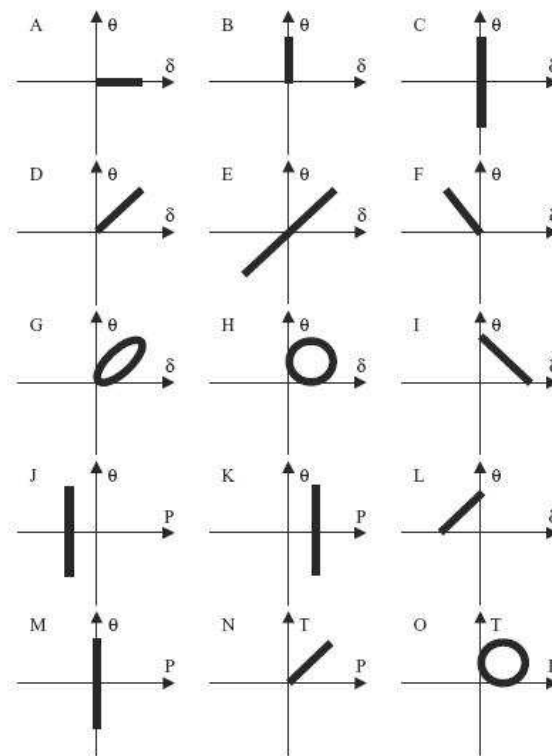
**Fig. 2.7:** Géométrie d'éprouvette utilisée par Mars [2001] pour les essais de fatigue : (a) montage finale et (b) éprouvette en caoutchouc.

Les objectifs principaux liés à l'utilisation de cette nouvelle éprouvette sont :

- Générer un champ de déformation relativement uniforme dans l'épaisseur de l'anneau afin de simplifier les relations déformation-déplacement et contrainte-effort. Ceci facilite la détermination de l'histoire des contraintes et des déformations à partir des mesures expérimentales ;
- Minimiser le flambement d'éprouvette lors des essais de compression ;
- Assurer que la fissure apparaîtra sur la surface extérieure de l'éprouvette afin de faciliter l'observation expérimentale de l'initiation et de la croissance de fissures ;
- Éviter la rupture adhésive entre l'éprouvette et les inserts.

Des essais de traction uniaxiale répétée en déplacement imposé (de 25% à 200% de déformation moyenne) sont tout d'abord réalisés puis des essais de torsion répétée et alternée en angle imposé. Les essais sont réalisés à des fréquences variant de 0,5 Hz à 6 Hz selon le niveau de déformation de manière à éviter l'auto-échauffement. Ensuite, Mars combine des sollicitations de traction uniaxiale à la torsion, en phase et hors-phase. Différents trajets de chargement réalisés par Mars sont présentés dans la figure 2.8. L'intérêt de chargements multiaxiaux hors-phase est de se placer dans un cas de figure où l'endommagement maximum dépend de l'histoire du chargement et non plus de son maximum.

En déplacement imposé, la fin de vie est définie par la chute de l'effort maximal de 15% par rapport à sa valeur stabilisée ( $\approx 128^{\text{ème}}$  cycle), et en effort imposé par l'augmentation de déplacement de 15% par rapport à sa valeur stabilisée ( $\approx 128^{\text{ème}}$  cycle). Pour compléter son étude, Mars introduit une nouvelle grandeur prédictive de la durée de vie *the cracking energy density* que nous allons traduire ici par *la densité d'énergie de fissuration* qui représente la partie d'énergie libérée lors de la croissance de fissure. L'auteur montre que cette grandeur est capable d'unifier des résultats de chargements multiaxiaux. Nous discuterons cette grandeur en détails dans le chapitre suivant.



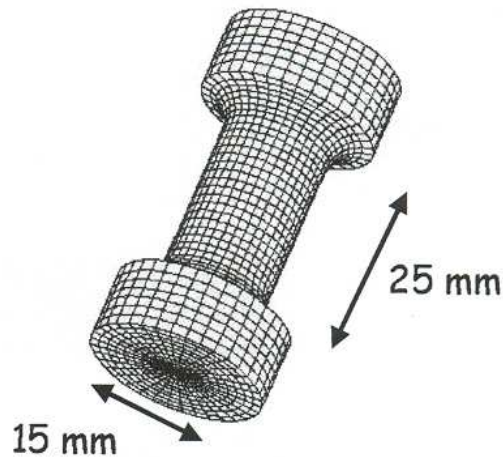
**Fig. 2.8:** Différents cas de trajet de chargement réalisé par Mars [2001] pour les essais de fatigues uniaxiale et multiaxiale.  $\theta$  désigne l'angle appliqué en torsion,  $\delta$  l'élongation en traction, T le couple et P la force axiale.

### 2.2.1.5 Expériences d'Abraham et al. (2005)

Afin de vérifier si l'augmentation de la durée de vie en traction-traction du caoutchouc naturel (qui cristallise sous contrainte) est aussi observée dans des caoutchoucs qui ne cristallisent pas, Abraham *et al.* [2005] réalisent des essais de traction sur le SBR et l'EPDM avec ou sans charges de noir de carbone. Les auteurs utilisent l'éprouvette de la figure 2.9 dont la partie utile est cylindrique. Les éprouvettes sont sollicitées en effort imposé à la fréquence de 1 Hz à la température ambiante.

L'enjeu de l'étude est double : définir l'influence sur la durée de vie de l'amplitude de l'effort pour un effort minimal nul et définir l'influence du niveau de l'effort minimal pour une amplitude de l'effort fixée. Ensuite, les auteurs tracent les durées de vie en fonction de différentes grandeurs prédictives, i.e. l'amplitude de déformation, la contrainte maximale et la densité d'énergie de déformation. Il convient de noter que les auteurs ne précisent pas la définition de la fin de vie qu'ils utilisent. A la lumière de ces résultats, ils concluent :

- Seule la densité d'énergie de déformation est une grandeur pertinente pour prédire la durée de vie ;
- L'augmentation de la durée de vie est également observée pour le SBR et l'EPDM chargés. En revanche, elle n'est pas observée pour le SBR et l'EPDM sans charge. En conséquence, les auteurs constatent que cette augmentation ne peut pas être attribuée



**Fig. 2.9:** Géométrie des éprouvette utilisées par [Abraham et al. \[2005\]](#) pour les essais de fatigue.

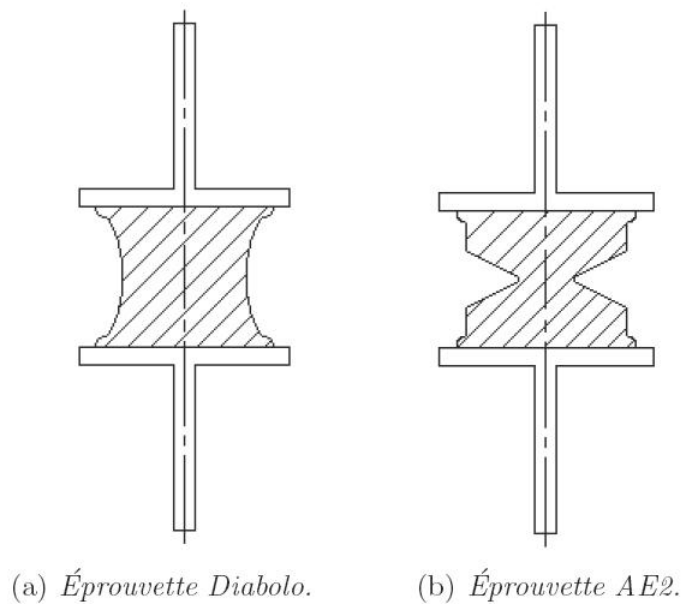
à la cristallisation sous contrainte. Sans préciser, pour eux, celle-ci est plutôt due aux propriétés du système de matrice et de charge.

Il convient de noter que des résultats disponibles dans la littérature aboutissent à deux conclusions contradictoires. Si [Lindley \[1974\]](#), [Robisson \[2000\]](#) et [Abraham et al. \[2005\]](#) arrivent à observer cette augmentation de la durée de vie dans des caoutchoucs chargés non-cristallisable sous contrainte, il n'en est pas de même pour [Fielding \[1943\]](#) et [Bathias et al. \[1997\]](#) qui réfutent que ces types d'élastomères présentent un renforcement en traction-traction.

#### 2.2.1.6 Expériences d'Ostoja-Kuczynski (2005) et Le Cam (2005)

Motivés par le fait que très peu d'études sont dédiées à la compréhension des mécanismes d'endommagement dans les élastomères soumis à des sollicitations cycliques, [Ostoja-Kuczynski \[2005\]](#) et [Le Cam \[2005\]](#) réalisent des essais de fatigue sur le NR qui cristallise sous contrainte et sur le SBR afin de déterminer les mécanismes d'initiation et de propagation des fissures. Pour cela, les auteurs utilisent des éprouvettes Diabolo et AE2 comme le montre la figure [2.10](#).

D'après Le Cam, la compréhension des mécanismes d'endommagement en initiation et propagation de fissures nécessite différents cas de chargement. Les essais uniaxiaux permettent d'identifier les mécanismes d'endommagement alors que les essais multiaxiaux permettent de vérifier la validité de la grandeur prédictive choisie. Dans ces études, les éprouvettes sont sollicitées à des fréquences inférieures à 5 Hz jusqu'à rupture et la fin de vie est définie comme le nombre de cycles nécessaire à l'apparition d'une fissure macroscopique de 2 mm en surface de l'éprouvette. Les essais de fatigue uniaxiale sont menés en déplacement imposé avec des éprouvettes Diabolo. Trois types de chargement sont envisagés, i.e. la traction-compression, la traction répétée et la traction-traction. Afin d'étudier les différents cas d'endommagement en fatigue à l'échelle macroscopique en fonction de la sollicitation mécanique, les essais sont interrompus à différents nombres de cycles avant l'apparition de fissures macroscopiques en surface. Les résultats sont montrés sur la figure [2.11](#). Ceux-ci mettent en lumière qu'un unique mode

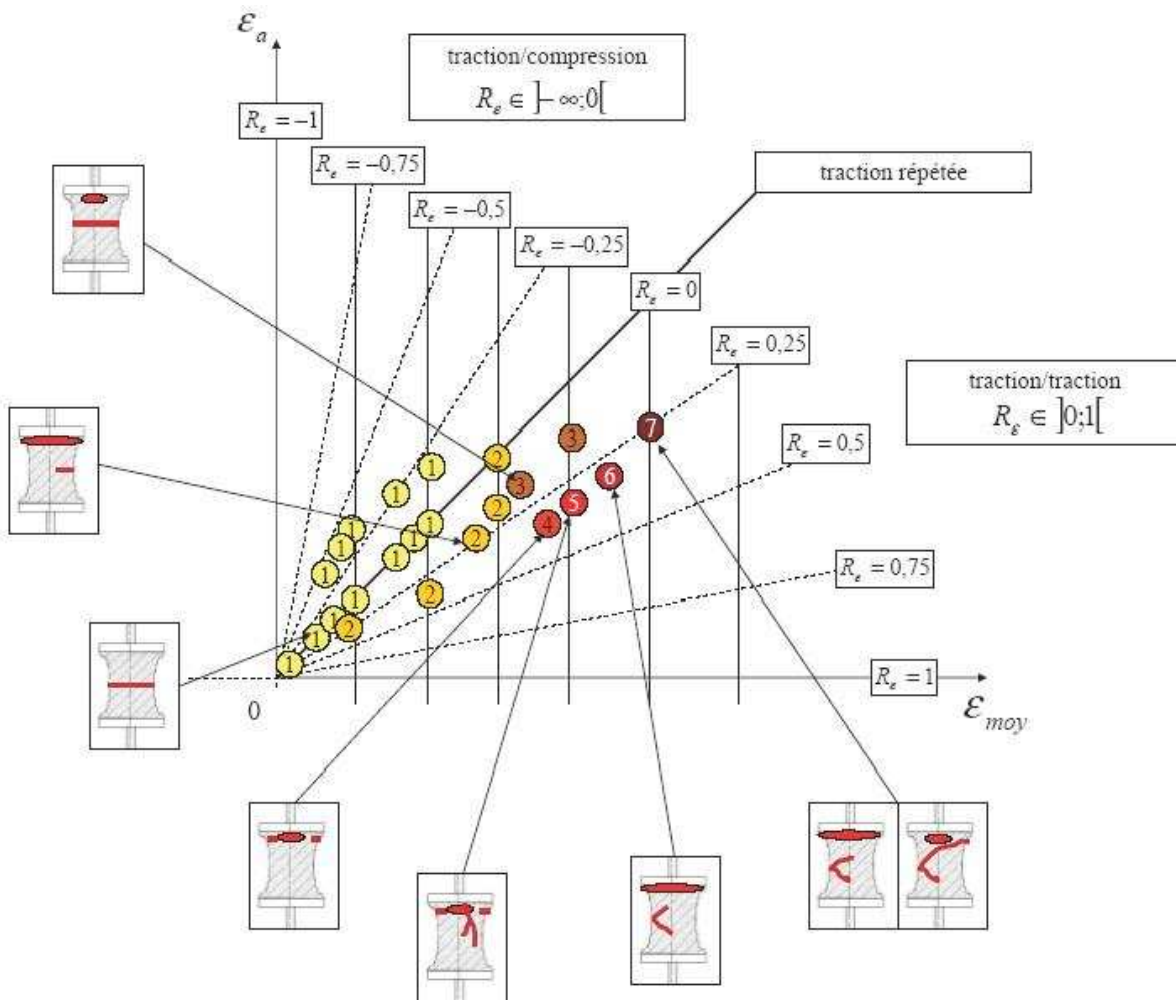


**Fig. 2.10:** Éprouvettes utilisées par [Ostoja-Kuczynski \[2005\]](#) et [Le Cam \[2005\]](#) pour les essais de fatigue. Les dimensions des éprouvettes ont été supprimées pour des raisons de confidentialité.

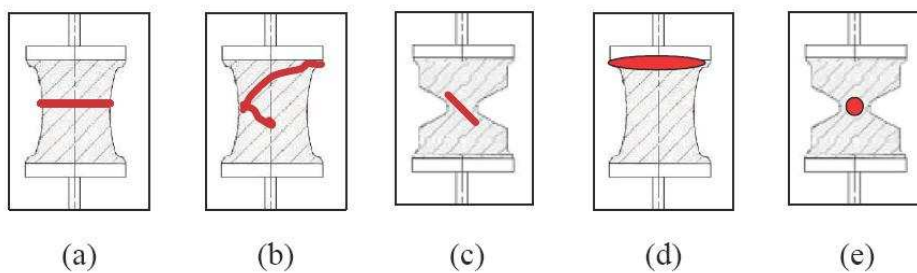
d'endommagement est observé en traction-compression. En revanche, lorsqu'une précharge statique en traction est appliquée, des multiples cas d'endommagement apparaissent. Dans l'objectif d'observer la forme, l'orientation et le type de propagation de fissure, les essais de torsion répétée et de torsion alternée en angle imposé sont menés sur les éprouvette AE2. Les essais sont arrêtés une fois que des fissures macroscopiques sont apparues en surface. Ensuite, des essais de traction-torsion répétées hors-phase sont réalisés afin d'étudier l'influence d'un chargement hors-phase sur la localisation de l'amorçage. Au regard des résultats obtenus, cinq modes de fissuration majeurs pouvant engendrer la rupture de l'éprouvette sont observés comme le montre la figure 2.12 : fissuration en surface à mi-hauteur qui se propage dans le plan médian (a), fissuration en surface à mi-hauteur qui se propage dans le volume en bifurquant successivement, formant ainsi des branches (b), fissuration en surface à mi-hauteur qui se propage peu dans la profondeur, mais selon un plan incliné perpendiculaire à la surface (c), fissuration interne sous les inserts (d), et fissuration interne au centre qui se propage vers la surface dans le plan médian (e). Sur ces travaux, le lecteur peut se référer à la thèse de [Le Cam \[2005\]](#) pour les détails

### 2.2.1.7 Autres expériences

Afin de compléter l'étude bibliographique concernant des essais de fatigue, nous mentionnons ici d'autres essais de la littérature. [Lu \[1991\]](#) et [Xie \[1992\]](#) réalisent des essais de fatigue sur les éprouvettes Diabolo en caoutchouc cristallisable sous contrainte à une fréquence de 3,5 Hz. Si Lu s'intéresse à l'effet de la température, Xie cherche plutôt à caractériser l'influence de l'environnement sur la durée de vie. [Bathias et al. \[1998\]](#) reprennent la géométrie d'éprouvette Diabolo utilisée par Lu afin d'étudier plus précisément l'influence de la cristallisation sous



**Fig. 2.11:** Synthèse des cas d'endommagement observés par Le Cam [2005] en fatigue uniaxiale à déplacement imposé en fonction de la sollicitation appliquée à l'échelle macroscopique (les valeurs en abscisses et en ordonnées ont été supprimées pour des raisons de confidentialité).



**Fig. 2.12:** Synthèse des cinq cas de fissuration menant à la rupture observée par Le Cam [2005].



contrainte. Contrairement à Lu, Bathias et al. réalisent leurs essais en effort imposé. Une étude sur des élastomères non-cristallisables sous contrainte est effectuée par Robisson [2000]. Les éprouvettes Diabolo et AE2 sont utilisées pour des essais de traction et de torsion. L'auteur essaie de définir des grandeurs représentatives de l'état d'endommagement généralisées au cas de chargements multiaxiaux. Enfin, Saintier [2000] s'interroge sur la fatigue de caoutchouc naturel en traction-compression, traction-compression avec précharge statique en torsion et torsion cyclique.

## 2.2.2 Critères expérimentaux de fin de vie

Nous avons vu dans la section précédente, les différents essais de fatigue de la bibliographie. Différents auteurs ont adopté différentes définitions de la fin de vie. Nous présentons ici les trois notions de critère expérimental de fin de vie proposés.

### - La rupture finale de la pièce

Ce critère semble le plus naturel et facile à observer expérimentalement même s'il est discutable en fonction des applications industrielles visées. Les premiers résultats exploitables adoptant ce critère sont ceux de Cadwell *et al.* [1940]. Lorsque la section d'éprouvettes est très faible, il peut être employé pour l'essai à amorçage de fissure puisque la propagation de la fissure sera suffisamment rapide ce qui permet d'assimiler l'instant de la rupture finale à celui de l'amorçage d'une fissure (Cantournet [2000]).

### - L'apparition d'une fissure

Ce critère est fondé sur la détection optique des fissures. La fin de vie est définie par l'apparition d'une fissure macroscopique de taille donnée en surface d'éprouvette. Svensson [1981] souligne l'importance de ne pas attendre la rupture finale de la pièce puisque la vitesse de fissuration devient très irrégulière lorsqu'on approche la rupture finale. Différents auteurs proposent différentes tailles critiques de fissure : pour Xie [1992], la taille critique est 3 mm ; pour Le Cam [2005] 2 mm ; alors que pour André *et al.* [1999], Robisson [2000], Saintier [2000], Ostoja-Kuczynski *et al.* [2003] et Ostoja-Kuczynski [2005] 1 mm. Il convient donc de souligner que cette taille critique dépend fortement de la taille de l'éprouvette.

### - La chute de l'effort maximal de réaction

Ce critère est issu de l'étude de l'évolution de l'effort maximal de réaction en fonction du nombre de cycles. Celle-ci peut être décomposée en trois phases : la phase d'accommodation marquée par une perte rapide de la rigidité du matériau, la phase stabilisée où l'effort se stabilise au cours de cycles et la phase finale marquée par la chute brutale de l'effort maximal jusqu'à rupture. Lu [1991] et Xie [1992] proposent de définir la fin de vie comme le nombre de cycles à partir duquel l'effort maximal de réaction chute brutalement. Pour Mars [2001], la fin de vie est définie par le nombre de cycles à partir duquel l'effort maximal diminue de 15% par rapport à sa valeur stabilisée ( $\approx 128^{\text{ème}}$  cycles). Celle-ci correspond à une taille de fissures qui n'excède pas le millimètre dans le cas des éprouvettes qu'il utilise (figure 2.7).

## 2.3 Observation à l'échelle microscopique

Dans les sections précédentes, nous avons réalisé un état de l'art sur la fatigue des élastomères à l'échelle macroscopique. Il convient de noter qu'il est difficile de comparer quantitativement tous ces résultats puisque les différents auteurs utilisent différents essais, géométries d'éprouvette, définitions de la fin de vie, compositions chimique des matériaux ainsi que grandeurs prédictives. A la lumière de cette courte étude bibliographique, il semble que la plupart des études qui s'intéressent à la prédiction de la durée de vie des élastomères se contentent d'observations à l'échelle macroscopique pour valider leur approche. Très peu d'études s'interrogent sur les mécanismes physiques de l'amorçage de fissure macroscopique et microscopique. En ce qui concerne les grandeurs prédictives, elles sont souvent considérées pertinentes dès lors qu'elles sont capables de localiser le lieu d'amorçage et l'orientation des fissures. Il a été montré dans les sections précédentes qu'en fait aucune grandeur prédictive classique, i.e. l'élongation principale maximale, la contrainte principale maximale et la densité d'énergie de déformation, n'est capable d'unifier les résultats des chargements multiaxiaux. Cette difficulté est partiellement résolue par Mars [2002] qui introduit la densité d'énergie de fissuration. L'auteur montre la pertinence de cette grandeur dans le cas de chargements multiaxiaux. Cependant, à notre avis ses développements théoriques sont discutables.

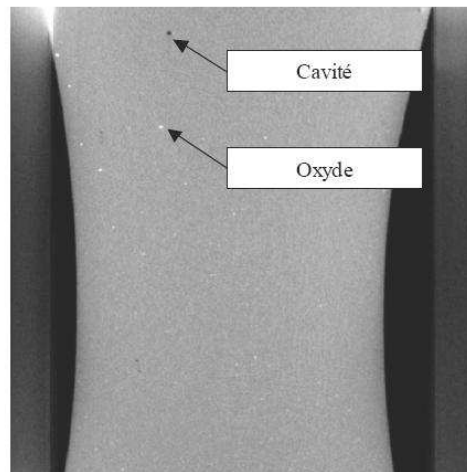
Compte tenu de toutes ces observations et afin d'introduire une grandeur prédictive qui est à la fois pertinente dans le cas de chargements multiaxiaux et bien fondée théoriquement, nous considérons que l'étude des mécanismes physiques relatifs à l'amorçage et à la propagation de fissure microscopique est primordiale. Pour cela, nous présentons dans la section suivante des observations expérimentales à l'échelle microscopique qui ont été réalisées dans notre équipe de recherche dans le cadre des travaux de thèse de Le Cam [2005].

### 2.3.1 Amorçage

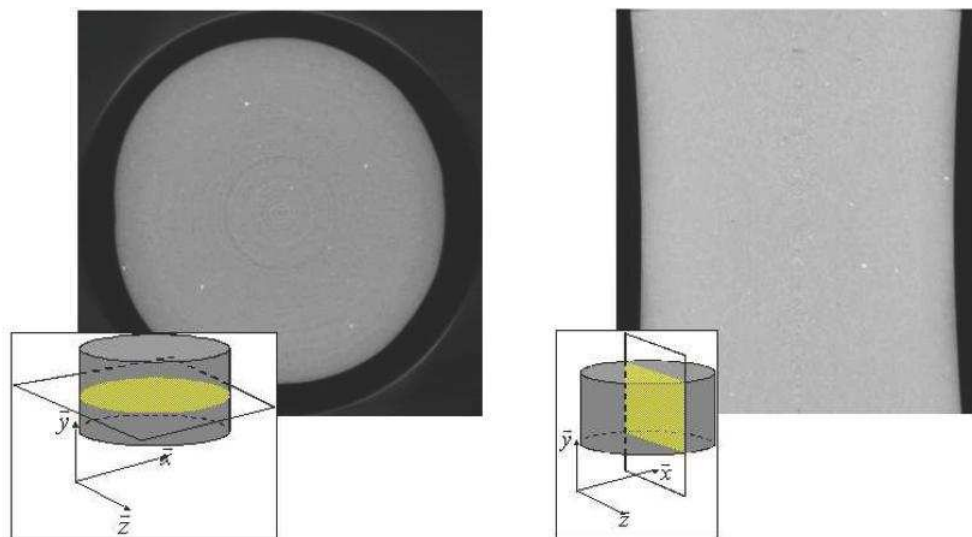
On sait depuis longtemps que l'origine de la rupture par fatigue des élastomères est la croissance de micro-défauts préexistants au sein du matériau (Gent *et al.* [1964]). Pour mieux comprendre ce phénomène, les observations expérimentales menées récemment dans notre équipe sur la morphologie et la distribution des défauts sont brièvement rappelées.

#### 2.3.1.1 Morphologie et distribution des micro-défauts

Une analyse par micro-tomographie à rayons X sur des éprouvettes Diabolo a été réalisée par Le Cam [2005]. Elle permet de mettre en évidence la distribution des défauts dans l'ensemble du volume des éprouvettes. La figure 2.13 montre un cliché obtenu par cette méthode. Le contraste est directement lié à la différence de densité entre les différents éléments en présence. Il est donc possible de distinguer les oxydes, plus denses que le carbone qui constitue le squelette des macromolécules de l'élastomère (en blanc), mais aussi des cavités (en noir). En ce qui concerne la taille de défauts, elle peut être déterminée soit par la mesure de la résistance statique (Gent [1978], Braden et Gent [1960]) ou en utilisant des microscopes optiques (Dizon *et al.* [1974]). Ces derniers ont montré que la taille des défauts est indépendante de la température. Cependant, la dépendance à la densité de réticulation (Lake et Lindley [1965], Hamed [1983]) et aux noirs de carbone (Lake et Lindley [1965], Dizon *et al.* [1974]) a été établie.



**Fig. 2.13:** Cliché obtenu par micro-tomographie à rayons X. Les contrastes reflètent la variation de numéro atomique entre les différents éléments (Le Cam [2005]).



**Fig. 2.14:** Micro-tomographie par rayons X d'une éprouvette vierge de toute sollicitation mécanique (Le Cam [2005]). (a) Coupe selon le plan transverse. (b) Coupe selon le plan longitudinal.

La distribution des micro-défauts dans l'éprouvette Diabolo vierge de toute sollicitation mécanique est présentée sur la figure 2.14. Deux coupes selon les plans transverse et longitudinal sont montrés. Le Cam souligne la présence de cavités au sein de l'éprouvette vierge de toute sollicitation mécanique malgré l'absence de zones noires correspondant à des cavités. Pour l'auteur, ceci s'explique par la limitation de la résolution spatiale du micro-tomographe utilisé. D'après Mars [2001], la taille des micro-défauts pré-existants dans le caoutchouc est au moins 100 fois plus grande que celle des particules de noirs de carbone. Saintier [2000] évoque trois familles de défauts sous la forme d'inclusions qui peuvent être présentes :

- La première est constituée des noirs de carbone dont le diamètre moyen des particules est de 26 nm environ. Le Cam constate que ceux-ci sont présents sous forme d'agrégats dont le diamètre moyen varie de 0,5 à 50  $\mu\text{m}$ . Ces agrégats peuvent s'agglomérer en agglomérats de diamètre moyen de 50 à 400  $\mu\text{m}$ . Auer et Doak [1958] et Lake et Lindley [1964b] observent que les noirs de carbone minimisent la croissance de fissure et donc maximise la durée de vie. Notons que ce dernier résultat est contraire aux résultats expérimentaux de Roberts et Benzies [1977] ;
- La seconde famille d'inclusions est du type oxyde de zinc (ZnO) et carbonate de calcium ( $\text{CaCO}_3$ ) . Ils sont introduits afin d'augmenter la tenue des matériaux à la chaleur. Ils sont donc également importants puisque l'augmentation de la température influence de façon significative la durée de vie (Lake et Lindley [1964a]). La taille des oxydes de zinc varie de 10 à 20  $\mu\text{m}$  ;
- Enfin, la troisième famille d'inclusions est celle des particules à base de silice. On retiendra parmi les principales particules à base de silice : l'oxyde de silice ( $\text{SiO}_2$ ) et le kaolin ( $\text{Al}_4(\text{OH})_8(\text{Si}_4\text{O}_{10})$ ). Les kaolins qui permettent de réduire le coût des mélanges sont généralement obtenus à partir de silicates d'aluminium hydratés.

### 2.3.1.2 Origine de l'amorçage microscopique

Afin de mettre en évidence l'amorçage à l'échelle microscopique, Le Cam [2005] réalise des observations de faciès de rupture. Elle sont menées pour les deux modes de fissuration discutées dans le chapitre précédent : fissuration en surface (figure 2.12 (a), (b) et (c)) et fissuration interne (figure 2.12 (d) et (e)).

Pour les trois types de fissuration en surface, il est observé que l'amorçage a lieu en subsurface de l'éprouvette à une distance de 200 à 600  $\mu\text{m}$  de la surface. Ceci est surprenant puisque la zone de plus forte contrainte est la surface. Pour expliquer ce phénomène, l'auteur évoque la nécessité de prendre en compte l'effet du procédé de fabrication sur les propriétés mécaniques de la zone jouxtant la surface. Il est également observé que l'amorçage s'opère sur les agglomérats de noirs de carbone. Deux cas se présentent : soit l'agglomérat se rompt en deux ou soit un phénomène de cavitation a lieu au voisinage de ses pôles. La cavitation est le processus par lequel se crée spontanément, sous l'effet d'une action extérieure, un vide au sein d'un matériau initialement non-poreux. Saintier [2000] démontre que la présence d'inclusions rigides favorise la cavitation. En ce qui concerne la fissuration interne, plus particulièrement l'amorçage sous les inserts (figure 2.12 (d)), il est démontré que l'origine de l'amorçage est probablement la décohésion entre les inclusions minérales et la matrice.

### 2.3.2 Propagation des micro-défauts

Nous avons vu que l'amorçage microscopique s'opère sur les micro-défauts pré-existants au sein de matériau vierge de toute sollicitation mécanique. Sous sollicitations mécaniques, ces micro-défauts se propagent et créent des fissures macroscopiques. Ainsi, l'initiation de fissures macroscopiques correspond en fait à la propagation de défauts à l'échelle microscopique. Afin d'étudier la chronologie des événements, il convient donc de comparer le nombre de cycles à l'apparition de fissure macroscopique à celui nécessaire pour faire propager les micro-défauts. Il s'agit donc de décrire l'évolution de l'endommagement avant que ne soit visible en surface une fissure. Pour cela, [Le Cam \[2005\]](#) propose d'observer l'endommagement, i.e. les cavités, à l'aide de la micro-tomographie par rayons X. L'expérience consiste à réaliser des essais de traction répétée à élongation maximale  $\lambda = 2$  et à les arrêter à différents nombres de cycles avant amorçage d'une fissure macroscopique en surface. La partie centrale de chaque éprouvette est alors scannée afin d'observer l'évolution des défauts, plus particulièrement des cavités. Cinq nombres de cycles sont considérés : 1 cycle, 5 cycles, 25% de  $N_f$ , 50% de  $N_f$  et 75% de  $N_f$ ,  $N_f$  étant le nombre de cycles à l'apparition d'une fissure macroscopique en surface d'éprouvette. Il convient de souligner que la taille maximale du défaut observée par l'auteur est de  $250 \times 400 \mu\text{m}$ . Ainsi, toutes les cavités de taille supérieure à  $250 \times 400 \mu\text{m}$  correspondent à une fissure en phase de propagation. Les résultats peuvent être résumés ainsi :

- **Éprouvette à 1 cycle.**

Pas de cavités de taille supérieure à la taille maximale des défauts sont observées. En revanche, de nombreuses cavités issues de la décohésion des oxydes et de la matrice élastomère, de taille inférieure sont détectées ;

- **Éprouvette à 5 cycles.**

Le même nombre de cavités issues de la décohésion des oxydes et de la matrice élastomère est observé ;

- **Éprouvette à 25% de  $N_f$ .**

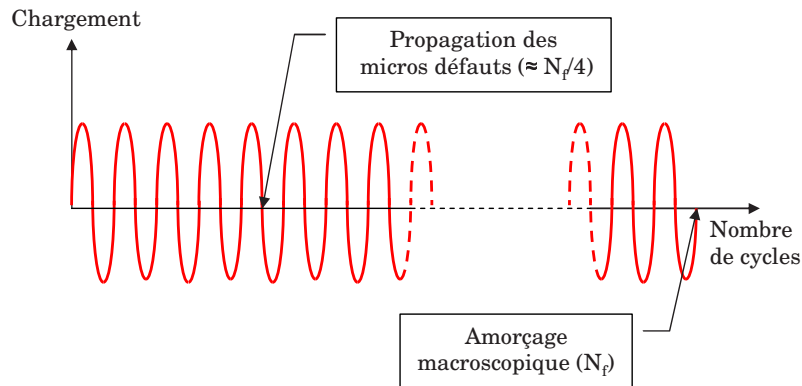
Les phénomènes observés dans les éprouvettes à 1 et 5 cycles sont également présents dans cette éprouvette. La différence majeure réside dans l'observation des cavités en sub-surface (zone d'initiation de fissure macroscopique) dont la taille est supérieure à la taille maximale des défauts pré-existants. Ceci montre bien que les cavités sont en phase de propagation.

- **Éprouvettes à 50 et 75% de  $N_f$ .**

Les cavités détectées en sub-surface, dans la zone d'initiation de fissure, sont de taille supérieure à celles détectées dans l'éprouvette à 25% de  $N_f$ .

Ces observations montrent que l'amorçage de fissures microscopiques a bien lieu dès la première charge par cavitation issue de la décohésion des oxydes et de la matrice élastomère. D'après l'auteur, le fait qu'à 25% de  $N_f$  le nombre de cavités issues de la décohésion est sensiblement le même qu'à 1 et 5 cycles, signifie que la décohésion dépend principalement du niveau de chargement et non du nombre de cycles de fatigue. Au contraire, la croissance des cavités au niveau d'agglomérats de noirs de carbone est favorisée par le chargement cyclique. Finalement, il est démontré que la propagation de fissures microscopiques (micro-défauts) prend place dès le premier quart de vie de la pièce, ce qui signifie que l'apparition de fissures macroscopiques

en surface correspond au moins à 75% de la propagation de défauts à l'échelle microscopique. Une illustration de ces résultats est proposée sur la figure 2.15.



**Fig. 2.15:** Illustration de la relation entre le nombre de cycles à la propagation de micro-défauts et l'amorçage macroscopique.

## 2.4 Conclusion

Au cours de ce chapitre, un état de l'art des essais réalisés ainsi que des résultats obtenus concernant la fatigue des élastomères a été dressé. Comme il l'a été mentionné plus haut, la comparaison quantitative des résultats est délicate. Une des caractéristiques importantes dans la fatigue des élastomères qui cristallisent sous contrainte est le renforcement de la durée de vie observé pour la première fois en 1940. Il semble que cette augmentation de la durée de vie a lieu dès que la contrainte reste strictement positive au cours des cycles. Cependant, les observations expérimentales de ce phénomène dans les élastomères qui ne cristallisent pas sous contrainte ne conduisent pas à un avis unanime. Finalement, nous avons également montré qu'aucune grandeur prédictive n'est pertinente dans le cas multiaxial. Au regard de cette dernière observation, il a été donc considéré que l'étude des mécanismes physiques d'amorçage et de propagation de fissure à l'échelle microscopique est primordiale pour proposer une nouvelle grandeur prédictive. L'étude expérimentale menée récemment dans notre équipe a montré qu'au départ, le caoutchouc vierge de toute sollicitation mécanique contient déjà des micro-défauts et que l'apparition de fissures macroscopiques en surface de pièce correspond pour au moins 75% à une phase de propagation de fissure à l'échelle microscopique, i.e. propagation de ces micro-défauts.

# Chapitre 3

## Grandeurs prédictives classiques

### Sommaire

---

|                                                                                 |           |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>3.1 Introduction</b> . . . . .                                               | <b>45</b> |
| <b>3.2 Descriptions des grandeurs prédictives de la bibliographie</b> . . . . . | <b>46</b> |
| 3.2.1 Elongation principale maximale . . . . .                                  | 46        |
| 3.2.2 Contrainte principale maximale . . . . .                                  | 46        |
| 3.2.3 Densité d'énergie de déformation . . . . .                                | 46        |
| 3.2.4 Densité d'énergie de fissuration . . . . .                                | 47        |
| <b>3.3 Conclusion</b> . . . . .                                                 | <b>49</b> |

---

### 3.1 Introduction

Ce court chapitre a pour objectif de présenter différentes grandeurs prédictives classiquement utilisées dans la littérature. Comme nous l'avons évoqué, l'approche en initiation de fissure s'intéresse à la fatigue des élastomères initialement non-fissurés et vierges de toute sollicitation mécanique. Ainsi, la durée de vie est définie par le nombre de cycles nécessaires pour faire apparaître une fissure de taille donnée en surface d'éprouvette. Cette approche qui est bien adaptée à notre étude est avantageuse puisque la durée de vie peut être déterminée à partir de l'histoire de certaines grandeurs mécaniques (contrainte, déformation, énergie) ou de leurs combinaisons en un point matériel sans considérer explicitement la fissure. [Wöhler \[1867\]](#) fut le premier à utiliser cette approche dans les métaux.

Pour prédire la durée de vie, trois grandeurs sont largement utilisées : l'élongation principale maximale ( $\lambda_{\max}$ ), la contrainte principale maximale ( $\sigma_{\max}$ ) et la densité d'énergie de déformation ( $W$ ). L'utilisation de chaque grandeur sera discutée. Nous avons décidé de présenter également une grandeur, la densité d'énergie de fissuration ( $W_c$ ), proposée récemment par [Mars \[2002\]](#) puisque la démarche de notre étude s'inspire beaucoup de son travail.

## 3.2 Descriptions des grandeurs prédictives de la bibliographie

### 3.2.1 Elongation principale maximale

Les essais de fatigue d'élastomères sont souvent menés en déplacement imposé. C'est pourquoi la déformation est souvent choisie comme une grandeur prédictive pour la fin de vie. De plus, dans beaucoup de cas, les fissures apparaissent dans le plan normal à la déformation principale (donc élongation) maximale (Mars et Fatemi [2002]). Les premiers travaux de la fatigue des élastomères s'interrogent particulièrement sur la description empirique du nombre de cycles avant l'apparition d'une fissure comme une fonction de la déformation maximale et de la déformation minimale. Pour des élastomères qui cristallisent sous contrainte, Cadwell *et al.* [1940] et Fielding [1943] ont trouvé que l'augmentation de la déformation minimale en fixant l'amplitude de déformation engendre l'amélioration de la durée de vie de manière significative. Celle-ci est observée dans le cas de chargement uniaxial et cisaillement. Toutefois, rien n'a été fait par les auteurs pour relier les résultats obtenus pour ces deux types de chargement. Roberts et Benzies [1977] et Roach [1982] ont tracé la durée de vie des élastomères en fonction de l'élongation principale maximale sous traction uniaxiale et biaxiale. Les auteurs ont observé que pour une valeur de l'élongation principale maximale donnée, la durée de vie est plus longue dans le cas uniaxial pour le NR et le SBR. Néanmoins, la différence est nettement plus importante pour le NR. Quelques années plus tard, Ro [1989] a conclu que l'élongation principale maximale n'est pas une grandeur pertinente pour unifier les résultats multiaxiaux.

### 3.2.2 Contrainte principale maximale

Bathias *et al.* [1998], André *et al.* [1999], Saintier [2000] et Abraham *et al.* [2005] utilisent la contrainte principale maximale de Cauchy comme une grandeur prédictive pour la durée de vie. En fait, l'analyse en contrainte est souvent proposée par les auteurs qui s'interrogent sur l'augmentation de la durée de vie en traction-traction. Il est observé que cette augmentation s'opère à partir d'une valeur seuil de contrainte positive. Sous sollicitations de torsion, André *et al.* montrent que des fissures se développent perpendiculairement à la direction de la contrainte principale. Néanmoins, André *et al.* [1999] et Abraham *et al.* [2005] constatent que la contrainte n'est pas une grandeur pertinente pour la prévision de la durée de vie.

### 3.2.3 Densité d'énergie de déformation

Jusqu'aux années cinquantes, l'étude de la fatigue des élastomères se concentre sur l'utilisation de grandeur prédictive de type déformation (Mars et Fatemi [2002]). Le progrès de l'application de la mécanique de la rupture dans les élastomères au début des années soixantes conduit plusieurs auteurs à utiliser la densité d'énergie de déformation comme une grandeur prédictive de la durée de vie (Beatty [1964]). Sous certaines conditions, e.g. traction uniaxiale, le taux de restitution d'énergie est proportionnel au produit de la densité d'énergie de déformation et de la taille de fissure (Gent *et al.* [1964]). Dans ce cas, la densité d'énergie de déformation peut être considérée comme le taux de restitution d'énergie. Cependant, la plupart de pièces en élastomères en service sont soumises à des sollicitations multiaxiales. Pour



le NR et le SBR, en utilisant cette grandeur, [Roberts et Benzies \[1977\]](#) et [Roach \[1982\]](#) ont établi que la durée de vie en traction biaxiale est respectivement quatre et seize fois supérieure à celle en traction uniaxiale. Il convient de noter que ceci est contraire aux résultats obtenus avec l'élongation principale maximale. Pour expliquer pourquoi les résultats uniaxiaux et multiaxiaux sont différents, [Roach \[1982\]](#) considère qu'en chargement multiaxial, seule une partie de la densité d'énergie de déformation est libérée pour la croissance des défauts : si en traction uniaxiale toute l'énergie est libérée pour la croissance des défauts, l'auteur constate que seule la moitié de l'énergie est libérée en traction biaxiale. Cette hypothèse fournit une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et les prédictions. [Ro \[1989\]](#) et [Abraham et al. \[2005\]](#) ont conclu que la densité d'énergie de déformation est une grandeur qui fournit des meilleurs résultats que l'élongation principale maximale ou la contrainte principale maximale. Cependant, étant une grandeur scalaire, elle ne permet pas de prédire le plan de fissure ([Mars et Fatemi \[2002\]](#)).

### 3.2.4 Densité d'énergie de fissuration

Il a été évoqué dans le paragraphe précédent que les progrès de l'application de la mécanique de la rupture dans les élastomères au début des années soixantes conduit plusieurs auteurs à utiliser la densité d'énergie de déformation comme une grandeur prédictive de la durée de vie ([Beatty \[1964\]](#)). Sous certaines conditions, e.g. traction uniaxiale, le taux de restitution d'énergie étant proportionnel à la densité d'énergie de déformation ([Gent et al. \[1964\]](#)). Celle-ci peut être considérée comme le taux de restitution d'énergie. Mathématiquement, ce dernier est donné par :

$$T = CWa \quad (3.1)$$

où  $T$ ,  $C$ ,  $W$  et  $a$  sont le taux de restitution d'énergie, la constante de proportionnalité qui dépend de la géométrie de la fissure, la densité d'énergie de déformation et la taille de fissure, respectivement. Considérant que pour des chargements complexes, seule une portion de la densité d'énergie de déformation est libérée pour la croissance des défauts, [Mars \[2002\]](#) propose de modifier l'équation précédente par :

$$T = CW_c a \quad (3.2)$$

où  $W_c$  est la densité d'énergie de fissuration (Cracking Energy Density, CED, en anglais) qui représente la partie de l'énergie libérée lors de la croissance de fissure. En élasticité, l'auteur postule que l'énergie libérée par une surface matérielle donnée est égale au travail des efforts qui s'y appliquent et qui permettent de la déformer. Ainsi, l'incrément de CED,  $W_c$ , est défini par le produit d'un vecteur de traction,  $\mathbf{t}$ , et d'un incrément de vecteur de déformation,  $d\Delta$  :

$$dW_c = \mathbf{t} \cdot d\Delta \quad (3.3)$$

Étant donné que pour une surface de normale  $\mathbf{N}$  :

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{N} = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} \quad \text{et} \quad d\Delta = d\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N} \quad (3.4)$$

l'expression du CED devient alors :

$$dW_c = \mathbf{N}^T (\boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{N} \quad (3.5)$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes de Cauchy. En élasticité non-linéaire en grandes transformations, deux formulations du CED sont proposées, i.e. en descriptions eulérienne et lagrangienne. Celles-ci s'écrivent respectivement :

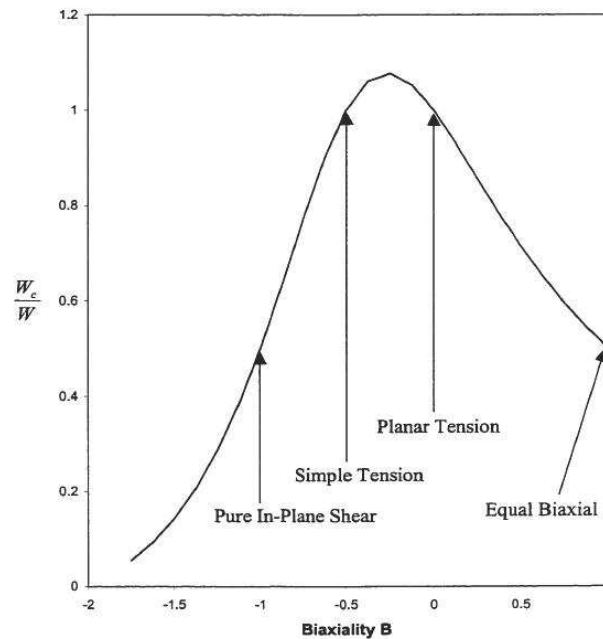
$$dW_c = [\mathbf{N}^T (\sigma \mathbf{D}) \mathbf{N}] dt \quad (3.6)$$

et

$$dW_c = \left[ J \frac{\mathbf{N}_0^T (\mathbf{C} \mathbf{S} \dot{\mathbf{E}}) \mathbf{N}_0}{\mathbf{N}_0^T \mathbf{C} \mathbf{R}} \right] dt \quad (3.7)$$

où  $J$  est le jacobien de la transformation, et  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\dot{\mathbf{E}}$  et  $\mathbf{D}$  sont le tenseur des dilatations de Cauchy-Green à droite, le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff II, le tenseur de taux de déformation lagrangien et le tenseur de taux de déformation eulérien, respectivement.  $\mathbf{N}$  est le vecteur normale à la surface considérée dans la configuration déformée. Sa projection dans la configuration non-déformée est notée  $\mathbf{N}_0$ .

La première étude menée par Mars consiste à déterminer la relation entre  $W_c$  et  $W$  en fonction de la biaxialité. Le résultat est présenté sur la figure 3.1. Il est observé, dans la plupart



**Fig. 3.1:** Evolution du  $W_c/W$  en fonction de la biaxialité (Mars [2001]).

des cas, que  $W_c$  est différent de  $W$ . Seuls dans les cas de traction uniaxiale et de cisaillement pur ( $B = -0,5$  et  $0$  sur la figure 3.1) ces deux grandeurs sont égales. La deuxième étude consiste à utiliser les résultats expérimentaux de Roberts et Benzies [1977] qui réalisent des essais de traction uniaxiale et équi-biaxiale. Ensuite, pour vérifier encore la pertinence de CED, Mars réalise également différents essais multiaxiaux proportionnels et non-proportionnels en phase et hors-phase (présentés dans le chapitre précédent). L'auteur démontre que le CED est capable d'unifier des résultats des différents chargements multiaxiaux.

### 3.3 Conclusion

Comme nous l'avons discuté au début de ce mémoire, la plupart de pièces anti-vibratoires automobiles qui nous intéresse perdent leur fonctionnalité suite à l'apparition de fissures macroscopiques en surface. Ce critère visuel est en lien direct avec la chute de la raideur de la pièce (Ostoja-Kuczynski *et al.* [2003]). C'est pourquoi, dans ce mémoire nous nous intéressons plus particulièrement à l'approche en initiation de fissure pour prédire la fin de vie. Dans cette approche, l'objectif est de relier les durées de vie à une grandeur mécanique prédictive. Notre attention porte à présent sur le choix d'une mesure d'endommagement (grandeur prédictive) qui traduise au mieux les mécanismes physiques mis en lumière par nos observations. Nous avons vu qu'au départ le matériau vierge de toute sollicitation mécanique contient déjà des micro-défauts et que l'apparition de fissure macroscopique en surface de la pièce correspond pour au moins 75% à une phase de propagation de fissure à l'échelle microscopique, i.e. propagation de ces micros-défauts. Jusqu'à maintenant, seule l'approche de Mars [2001] tient compte de ces phénomènes (paragraphe précédent). En effet, l'auteur introduit une grandeur nommée la densité d'énergie de fissuration (CED) qu'il qualifie comme une grandeur intrinsèque à la fatigue des élastomères au sens où une courbe maîtresse "CED vs durée de vie" peut être établie quel que soit le cas de chargement. A notre avis, son approche est intéressante. Cependant, nous pensons que les développements théoriques proposées par Mars pour définir l'increment de CED sont discutables.

A la lumière de toutes ces observations, une grandeur prédictive physiquement motivée doit être capable de traduire cette phase de propagation de fissure à l'échelle microscopique, donc elle doit traduire la notion de taux de restitution d'énergie pour "ouvrir les micro-défauts". Par ailleurs, ayant l'objectif d'implanter cette grandeur dans un code de calcul d'éléments finis afin d'effectuer du calcul de structures, nous souhaitons travailler avec des quantités mécaniques pouvant se calculer à partir de la mécanique des milieux continus et non de la mécanique de la rupture. De ce fait, nous pensons que le tenseur des contraintes configurationnelles (le tenseur de contrainte d'Eshelby, le tenseur de moment matériel), grandeur centrale de la mécanique configurationnelle, introduit par Eshelby [1951, 1975] semble un outil tout à fait approprié afin d'introduire une nouvelle grandeur prédictive.



**Deuxième partie**

**Construction d'une nouvelle grandeur  
prédictive**



# Chapitre 4

## Mécanique configurationnelle

### Sommaire

---

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4.1 Introduction</b> . . . . .                                | <b>53</b> |
| <b>4.2 Forces configurationnelles</b> . . . . .                  | <b>54</b> |
| 4.2.1 Force sur un défaut . . . . .                              | 55        |
| 4.2.2 Taux de restitution d'énergie . . . . .                    | 58        |
| <b>4.3 Equation du mouvement purement matérielle</b> . . . . .   | <b>59</b> |
| 4.3.1 Cas élastique . . . . .                                    | 60        |
| 4.3.2 Extension au cas inélastique . . . . .                     | 62        |
| <b>4.4 Contrainte configurationnelle</b> . . . . .               | <b>63</b> |
| 4.4.1 Définition géométrique . . . . .                           | 63        |
| 4.4.2 Interprétation physique de composantes . . . . .           | 65        |
| 4.4.3 Applications de la contrainte configurationnelle . . . . . | 66        |

---

### 4.1 Introduction

Dans la première partie, un état de l'art sur la fatigue des élastomères aux échelles macroscopique et microscopique a été dressé. Quelques résultats expérimentaux issus de la littérature ont été présentés. Nous retiendrons de ces résultats qu'il est difficile de les comparer de manière quantitative : en effet, les auteurs utilisent différents essais, géométries d'éprouvette, définitions de la fin de vie, compositions chimique des matériaux et ils analysent les résultats expérimentaux avec différentes grandeurs prédictives. En ce qui concerne la prédiction de la durée de vie, même si la plupart des grandeurs prédictives satisfont au traitement des résultats des essais uniaxiaux, leur généralisation aux chargements multiaxiaux pose problème. De ce fait, afin d'introduire une grandeur prédictive pertinente, nous affirmons que la compréhension des mécanismes physiques d'initiation et de propagation de fissure à l'échelle microscopique est primordiale. Finalement, l'étude bibliographique de ces phénomènes va nous conduire dans le chapitre suivant à utiliser le tenseur des contraintes configurationnelles en tant que grandeur prédictive pour la durée de vie.

L'objectif du présent chapitre est de présenter brièvement la notion de mécanique configurationnelle. La mécanique configurationnelle, appelée aussi mécanique eshelbienne par [Maugin \[1995\]](#) et mécanique dans l'espace matériau par [Kienzler et Herrmann \[2000\]](#), est la mécanique des milieux continus (mécanique dans l'espace physique) exprimée dans une description purement matérielle ([Maugin \[2002a\]](#)). Cette notion a été introduite initialement par [Eshelby \[1951\]](#), et étendue en grandes transformations par [Eshelby \[1975\]](#) et [Chadwick \[1975\]](#), en étudiant la force s'exerçant sur une singularité. L'auteur montre que le tenseur des contraintes configurationnelles est en fait un ingrédient principal dans l'expression de ce type de force.

Notre étude bibliographique commence avec un bref rappel de la notion de force newtonienne (force physique) avant de présenter la notion de force configurationnelle (force matérielle). Nous nous intéresserons plus particulièrement aux travaux originaux d'Eshelby. Ensuite, il sera établi que les forces et la contrainte configurationnelles interviennent dans l'équation du mouvement en description purement matérielle de la même manière que la force newtonienne et la contrainte de Cauchy (ou la contrainte de Piola-Kirchhoff I) sont présentes dans l'équation du mouvement classique, i.e. en descriptions eulérienne et lagrangienne. Puisque notre grandeur sera développée à partir de la contrainte configurationnelle, une partie de ce chapitre va être consacrée à l'interprétation physique de ses composantes. Finalement, quelques applications courantes de cette théorie jusqu'à ce jour seront discutées.

▷ **Remarque :**

*Il convient de noter que nous nous plaçons ici en tant qu'utilisateur de cette théorie. Ainsi, la présente étude bibliographique se réduit à quelques notions simples mais cohérentes avec notre objectif. Pour une étude plus complète sur la mécanique configurationnelle, le lecteur peut se référer aux travaux de [Maugin \[1993\]](#), [Kienzler et Herrmann \[2000\]](#) ou encore [Gurtin \[2000\]](#). Contrairement aux autres auteurs, Gurtin considère la mécanique configurationnelle comme un nouveau concept de la mécanique, i.e. indépendant de la mécanique des milieux continus classique. Ici, nous nous plaçons plutôt dans l'approche de Maugin.*

## 4.2 Forces configurationnelles

Classiquement, la transformation d'un milieu continu est étudiée soit en description lagrangienne ou soit en description eulérienne. Dans la description lagrangienne on s'intéresse au mouvement des points matériels (particules) qui constituent un corps matériel dans l'espace au cours du temps. En revanche, en description eulérienne on fixe notre attention sur une position spatiale donnée et on observe la variation des grandeurs mécaniques, e.g. la vitesse, l'accélération, la densité, au cours du temps à cette position. Ce sont des descriptions spatiales du mouvement dans lesquelles les forces newtoniennes (forces physiques) sont énergétiquement conjuguées à la variation d'une position spatiale (déplacement spatial) pour une position matérielle fixée. Il existe en fait d'autres façons de décrire le mouvement, notamment en description matérielle dans laquelle les forces, dites forces configurationnelles ou matérielles, sont énergétiquement conjuguées à la variation d'une position matérielle (déplacement matériel) pour une position spatiale fixée ([Steinmann \[2000\]](#)). C'est pourquoi les forces configurationnelles s'exercent sur des défauts qui existent au sein de matériau ([Maugin \[1995\]](#)), e.g. dislocation ([Peach et Koehler \[1950\]](#)), fissure ([Rice \[1968\]](#), [Casal \[1978\]](#)) ou point de singularité

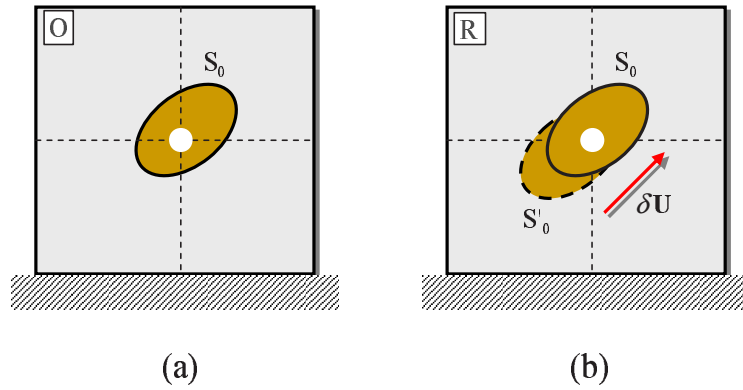


(Eshelby [1951]).

Les deux sections suivantes permettent de mettre en évidence la notion de force configurationnelle et leur importance dans l'étude des corps contenant des défauts.

### 4.2.1 Force sur un défaut

Dans cette section, une brève synthèse des travaux d'Eshelby [1951, 1975] est présentée. Considérons un corps matériel élastique dans la configuration non-déformée qui contient un défaut représenté par un point blanc sur la figure 4.1 (a). Supposons qu'il n'y ait pas de



**Fig. 4.1:** Corps matériel dans la configuration non-déformée : (a) système original, (b) réplique du système original.

force volumique s'exerçant sur le corps considéré. Soit un contour  $S_0$  englobant ce défaut. Nous appelons ce corps le système original (noté O). La figure 4.1 (b) montre une réplique (notée R) du système original. On considère, dans cette réplique, un deuxième contour, noté  $S'_0$ , construit par la translation de  $S_0$  selon le vecteur infinitésimal  $-\delta\mathbf{U}$  dans la configuration non-déformée. On définit la force configurationnelle sur un défaut par le gradient négatif de l'énergie totale du corps par rapport au changement de position du défaut dans le corps ; celle-ci peut donc être évaluée en calculant le changement d'énergie totale associé au déplacement  $-\delta\mathbf{U}$  de ce défaut. L'énergie contenue dans  $S'_0$  et  $S_0$  est respectivement :

$$E_{(S_0)} = \int_{V(S_0)} W dV_0 \quad \text{et} \quad E_{(S'_0)} = \int_{V(S'_0)} W dV_0 \quad (4.1)$$

où  $W$  est la densité d'énergie de déformation par unité de volume dans la configuration non-déformée. La différence de ces énergies peut être calculée par le développement de Taylor au voisinage de  $S_0$  (le déplacement  $\delta\mathbf{U}$  étant petit) :

$$\begin{aligned} E_{(S'_0)} &= E_{(S_0)} + \left. \frac{dE}{d\mathbf{X}} \right|_{S_0} \cdot (-\delta\mathbf{U}) + \underbrace{f [(\delta\mathbf{U})^2]}_{\approx 0} \\ &= E_{(S_0)} + \frac{d}{d\mathbf{X}} \left[ \int_{V(S_0)} W dV_0 \right] \cdot (-\delta\mathbf{U}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

d'où :

$$\delta E = E_{(S'_0)} - E_{(S_0)} = -\delta \mathbf{U} \cdot \int_{V(S_0)} (\text{Grad } W) dV_0 \quad (4.3)$$

avec  $\text{Grad } W = \partial W / \partial \mathbf{X}$ . En appliquant la théorème de la divergence, on obtient finalement :

$$\delta E = -\delta \mathbf{U} \cdot \int_{S_0} W \mathbf{N}_0 dA_0 \quad (4.4)$$

Puis, nous procédons comme suit (voir figure 4.2) :

- Dans *la configuration déformée* du système original (figure 4.2 (b)), la surface  $S$  (transformée de  $S_0$ ) est découpée puis la matière à l'intérieur est enlevée. Ensuite, les tractions sont appliquées au niveau du trou ainsi créé afin d'empêcher la relaxation de la matière (figure 4.2 (c)).
- Une procédure similaire est effectuée pour la surface  $S'$  (transformée de  $S'_0$ ) de la réplique dans *la configuration déformée* (figure 4.2 (e) et (f)).
- Ensuite, on insère  $S'$  dans le trou laissé par  $S$  dans le système original (figure 4.2 (g)).

Bien évidemment *les surfaces déformées* ( $S'$  et  $S$ ) ne coïncident pas. En effet, bien que  $S_0$  et  $S'_0$  correspondent parfaitement (car définies à une translation près), cela n'est plus vrai pour  $S'$  et  $S$ . La différence de déplacement entre  $S'$  et  $S$ ,  $\delta \mathbf{u}$ , est donnée par :

$$\delta \mathbf{u} = -(\text{Grad } \mathbf{u}) \delta \mathbf{U} + \underbrace{f [(\delta \mathbf{U})^2]}_{\approx 0} = -(\mathbf{F} - \mathbf{I}) \delta \mathbf{U} \quad (4.5)$$

où  $\mathbf{F}$  est le tenseur gradient de la transformation et  $\mathbf{I}$  le tenseur d'identité. On applique donc ce déplacement à la surface du trou de la structure originale dans la configuration déformée. Cela requiert le travail  $\delta P$  :

$$\delta P = - \int_S \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} dA = - \int_S \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{N}) dA \quad (4.6)$$

avec  $\mathbf{T}$  le vecteur traction,  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur de la contrainte de Cauchy et  $\mathbf{N}$  le vecteur normal sortant de contour  $S$ . En exprimant ce travail relativement à *la configuration non-déformée*, il vient :

$$\begin{aligned} \delta P &= - \int_{S_0} [ -(\mathbf{F} - \mathbf{I}) \delta \mathbf{U} ] \cdot [ (J^{-1} \boldsymbol{\pi} \mathbf{F}^T) (J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}_0) ] dA_0 \\ &= \delta \mathbf{U} \cdot \left[ \int_{S_0} \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} \mathbf{N}_0 dA_0 - \underbrace{\int_{S_0} \boldsymbol{\pi} \mathbf{N}_0 dA_0}_{=0} \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

où  $J = \det \mathbf{F}$ ,  $\boldsymbol{\pi}$  le tenseur de la contrainte de Piola-Kirchhoff I et  $\mathbf{N}_0$  est le vecteur normal sortant de contour  $S_0$ . La seconde intégrale s'annule puisqu'aucune force volumique ne s'exerce. Le travail se réduit donc à :

$$\delta P = \delta \mathbf{U} \cdot \int_{S_0} \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} \mathbf{N}_0 dA_0 \quad (4.8)$$

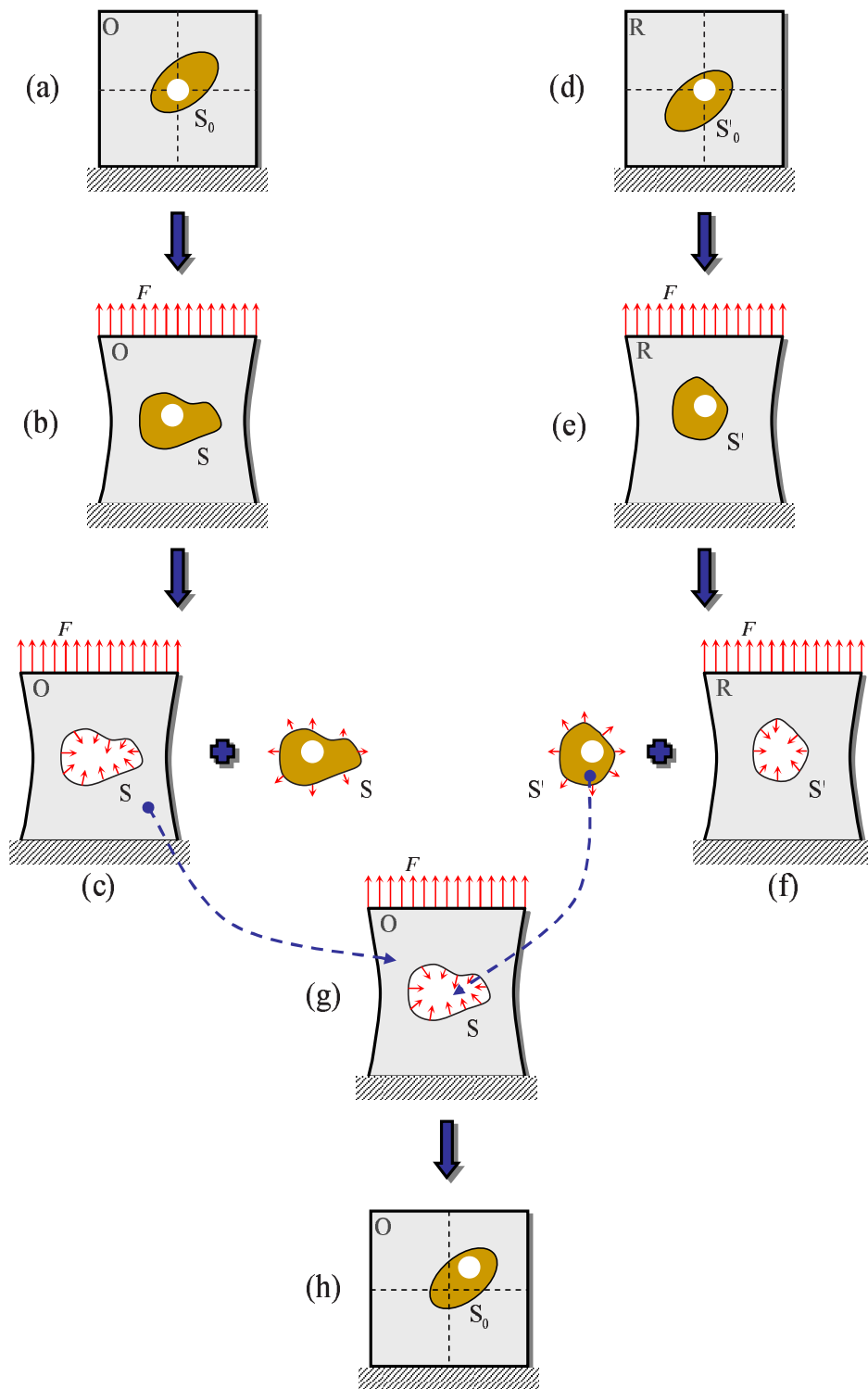


Fig. 4.2: Déplacement matérielle d'un défaut.

On peut ainsi insérer  $S'$  à la place de  $S$  dans le système original. Il convient de noter que bien que les déplacements soient continus, le champ de contrainte ne l'est pas. En effet, les champs de contrainte à l'interface de  $S'$  et de  $S$  diffèrent de l'ordre de  $|\delta\mathbf{U}|$ . Sa relaxation entraînera une variation du champ de déplacement de l'ordre de  $|\delta\mathbf{U}|$ . Celle-ci sera transformée en variation d'énergie de l'ordre de  $|\delta\mathbf{U}|^2$  qui pourra être négligée au vu des équations (4.4) et (4.8).

Finalement, on obtient une structure identique au système original, mais avec un défaut translaté de  $+\delta\mathbf{U}$  dans la configuration non-déformée (figure 4.2 (h)). Ainsi, le changement d'énergie totale associé au mouvement de ce défaut est :

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \delta E + \delta P \\ &= -\delta\mathbf{U} \cdot \int_{S_0} W\mathbf{N}_0 dA_0 + \delta\mathbf{U} \cdot \int_{S_0} \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} \mathbf{N}_0 dA_0 \\ &= -\delta\mathbf{U} \cdot \int_{S_0} (W\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi}) \mathbf{N}_0 dA_0\end{aligned}\quad (4.9)$$

Rappelons que la force configurationnelle sur un défaut, notée  $\bar{\mathbf{G}}$ , est définie par le gradient négatif de l'énergie totale du corps par rapport au changement de position du défaut dans le corps, d'où :

$$\bar{\mathbf{G}} = \lim_{\delta\mathbf{U} \rightarrow 0} -\frac{\delta\Pi}{\delta\mathbf{U}} = \int_{S_0} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{N}_0 dA_0 \quad (4.10)$$

avec

$$\boldsymbol{\Sigma} = W\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} \quad (4.11)$$

qui est le tenseur des contraintes configurationnelles ou tenseur des contraintes d'Eshelby. Il est clair que la contrainte configurationnelle joue un rôle importante dans la formulation de la force configurationnelle. Maugin [1993, 1995] démontre que ce rôle est aussi observé dans la formulation des forces configurationnelles associée à une charge électrique et à l'inhomogénéité du matériau, e.g. la dépendance du module d'élasticité à la position du point matériel.

## 4.2.2 Taux de restitution d'énergie

Nous allons à présent nous intéresser à un type de défaut particulier : une fissure. Pour simplifier la discussion, seul le cas bidimensionnel sera examiné (voir figure 4.3). Inspiré par les travaux d'Eshelby [1951] et de Cherepanov [1967, 1968], Rice [1968] introduit l'intégrale de contour suivante, connue sous le nom d'intégrale  $J$  :

$$J_1 = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} [W N_1 - u_{,1} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{N})] d\Gamma \quad (4.12)$$

où  $N_1 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_1$ , avec  $\mathbf{N}$  le vecteur normal au contour  $\Gamma$  englobant la pointe de la fissure. Notons que l'équation (4.12) est équivalente à :

$$J_1 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_1 = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{N} d\Gamma) \cdot \mathbf{e}_1 \quad (4.13)$$

qui représente la force configurationnelle par unité de longueur associée à la propagation de fissure. Cette expression, qui est en fait l'expression du taux de restitution d'énergie, souligne le rôle important de la contrainte configurationnelle dans la mécanique de la rupture.

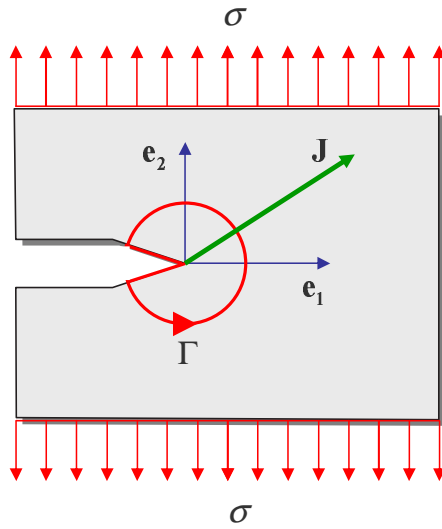


Fig. 4.3: Corps fissuré (2D).

### 4.3 Equation du mouvement purement matérielle

Comme il l'a été évoqué dans l'introduction, les forces newtoniennes et les contraintes de Cauchy (ou la contrainte de Piola-Kirchhoff I) contribuent à l'équation du mouvement classique, i.e. en descriptions eulérienne et lagrangienne. Nous nous interrogeons à présent sur l'existence d'autres équations du mouvement dans lesquelles les forces et contraintes configurationnelles interviennent. Pour cela, considérons un corps matériel  $\mathcal{B}$  dans une configuration de référence  $(\mathcal{C}_R)$ . Sous sollicitation mécanique, le corps change de configuration. A  $t_0$ , il occupe une configuration  $(\mathcal{C}_{t_0})$  et à l'instant  $t$  donné il se trouve dans la configuration  $(\mathcal{C}_t)$  (figure 4.4). Classiquement, l'équation de conservation de la quantité de mouvement associée à ce corps s'écrit en descriptions lagrangienne et eulérienne :

$$\dot{\mathbf{P}} = \text{Div } \boldsymbol{\pi} + \bar{\mathbf{B}} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{p}} = \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} \quad (4.14)$$

respectivement. Dans cette expression,  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\pi}$  sont les contraintes de Cauchy et de Piola-Kirchhoff I,  $\bar{\mathbf{B}}$  et  $\bar{\mathbf{b}}$  sont les forces physiques volumique mesurées par unité de volume dans les configurations de référence  $(\mathcal{C}_R)$  et déformée  $(\mathcal{C}_t)$  respectivement.  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{p}$  sont respectivement les quantités de mouvement mesurées par unité de volume dans  $(\mathcal{C}_R)$  et  $(\mathcal{C}_t)$ . En général, le mouvement d'un milieu continu dans l'espace physique  $E^3$  est accompagné d'un changement ou d'un réarrangement de sa structure interne (configuration), e.g. micro-défauts ou dislocations. Afin de faciliter la description de l'évolution de la structure interne d'un milieu, nous avons besoin d'exprimer l'équation de mouvement classique (4.14) dans une description purement matérielle (Steinmann [2000]), i.e. exprimée dans l'espace matériau  $M^3$ . Les éléments de l'espace matériau sont les particules qui permettent de définir, pour un corps donné, sa configuration de référence. Lors du mouvement, la position de ces particules dans l'espaces physique permet de définir la configuration courante. Comme il a été souligné par Maugin [1995], même en description lagrangienne, les quantités mécaniques telle que la force sont toujours définies dans  $(\mathcal{C}_t)$ . Par conséquent, la formulation (4.14)<sub>1</sub> n'est pas une expression purement matérielle.

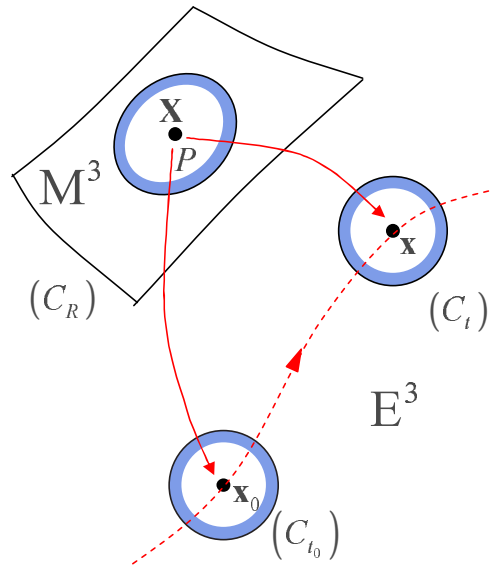


Fig. 4.4: Description de mouvement (Mauguin [1995]).

Notre discussion porte donc à présent sur la construction d'une expression purement matérielle équivalente à (4.14). Pour cela, deux points de vue sont proposés dans la littérature. Soit l'équation matérielle du mouvement est considérée indépendante des formulations classiques (voir principalement Gurtin [2000]), soit l'équation matérielle du mouvement est déduite des équations classiques (Mauguin [1993, 1995, 2003, 2006]). Dans ce cas, elle peut être obtenue par un "pull-back" complet de l'équation du mouvement classique. Notre travail se fondera sur cette dernière approche. Dans un premier temps, la formulation élastique sera présentée. Puis, nous traiterons du cas inélastique afin de prendre en compte les processus dissipatifs.

### 4.3.1 Cas élastique

Afin de formuler l'équation du mouvement purement matérielle, Mauguin utilise deux méthodes : directe et variationnelle. Dans la suite, seule la première est présentée. Les lecteurs peuvent se reporter à Mauguin et Trimarco [1992] et Mauguin [1993] pour la formulation variationnelle avec application à la mécanique de la rupture. Il convient de noter que Kienzler et Herrmann [2000] utilise également cette formulation variationnelle.

La méthode directe consiste à multiplier à gauche l'équation de conservation de la quantité de mouvement en description lagrangienne (4.14)<sub>1</sub> par  $\mathbf{F}^T$  :

$$\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^T \text{Div } \boldsymbol{\pi} + \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{B}} \quad (4.15)$$

Dans l'objectif de développer cette équation, introduisons la fonction de lagrange  $\mathcal{L}$  mesurée par unité de volume non-déformé :

$$\mathcal{L}(\mathbf{F}, \mathbf{X}, T) = \frac{1}{2} \rho_0(\mathbf{X}, T) \mathbf{v}^2(\mathbf{X}) - W(\mathbf{F}, \mathbf{X}, T) \quad (4.16)$$

où  $W$  est la densité d'énergie de déformation par unité de volume non-déformé,  $T$  est la température absolue,  $\rho_0$  est la masse volumique et  $\mathbf{X}$  est la position du point matériel. La

dépendance des propriétés mécaniques à la position du point matériel considéré permet de traduire l'inhomogénéité de matériau. Écrivons le gradient de  $\mathcal{L}$  par rapport aux coordonnées initiales :

$$\begin{aligned} \text{Grad } \mathcal{L} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\text{Grad } \rho_0) \mathbf{v}^2 + \rho_0 (\text{Grad } \mathbf{v})^T \mathbf{v} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} : \text{Grad } \mathbf{F} \\ & - \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\text{explicite}} - \frac{\partial W}{\partial T} \text{Grad } T \end{aligned} \quad (4.17)$$

où pour tout scalaire  $f = f(A_{ij}, A_k, A)$ , on a :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial A_m} \right|_{\text{explicite}} = \left. \frac{\partial f}{\partial A_m} \right|_{A_{ij}, A_k, A \text{ constant}, k \neq m} \quad (4.18)$$

Étant donné que  $\text{Grad } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}}$ , et en utilisant les lois d'état (Coleman et Gurtin [1967]), il vient d'après le second principe de la thermodynamique :

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \quad \text{et} \quad S = -\frac{\partial W}{\partial T} \quad (4.19)$$

et l'équation (4.17) devient :

$$\begin{aligned} \text{Grad } \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\text{Grad } \rho_0) \mathbf{v}^2 + \rho_0 \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{v} - \boldsymbol{\pi} : \text{Grad } \mathbf{F} \\ & - \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\text{explicite}} + S \text{Grad } T \end{aligned} \quad (4.20)$$

où  $S$  est l'entropie mesurée par unité de volume de  $C_R$ . En utilisant l'identité :

$$\boldsymbol{\pi} : \text{Grad } \mathbf{F} = \text{Div} (\mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi}) - \mathbf{F}^T \text{Div } \boldsymbol{\pi} \quad (4.21)$$

et après une simple manipulation, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T \text{Div } \boldsymbol{\pi} = & \text{Div} (\mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi}) + \text{Grad } \mathcal{L} + \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\text{explicite}} \\ & - \frac{1}{2} (\text{Grad } \rho_0) \mathbf{v}^2 - \rho_0 \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{v} - S \text{Grad } T \end{aligned} \quad (4.22)$$

Donc, l'équation (4.15) devient :

$$\begin{aligned} -\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{P}} - \rho_0 \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{v} = & -\text{Grad } \mathcal{L} - \text{Div} (\mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi}) + S \text{Grad } T \\ & + \frac{1}{2} (\text{Grad } \rho_0) \mathbf{v}^2 - \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\text{explicite}} - \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (-\mathbf{F}^T \mathbf{P}) = & \text{Div} (-\mathcal{L} \mathbf{I} - \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi}) + S \text{Grad } T \\ & + \frac{1}{2} (\text{Grad } \rho_0) \mathbf{v}^2 - \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \right|_{\text{explicite}} - \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Finalement, l'équation du mouvement locale en description purement matérielle est :

$$\dot{\mathcal{P}} = \text{Div } \Sigma_{\text{dyn}} + \mathbf{G} \quad (4.25)$$

avec :

$$\Sigma_{\text{dyn}} = -\mathcal{L}\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} \quad (4.26)$$

et :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{\text{inh}} + \mathbf{G}^{\text{ext}} + \mathbf{G}^{\text{th}} \quad (4.27)$$

Ici,  $\Sigma_{\text{dyn}}$  est le tenseur de la contrainte configurationnelle dynamique,  $\mathcal{P}$  est la quantité de mouvement matérielle ("pseudo-momentum") par unité de volume de  $(\mathcal{C}_R)$ .  $\mathbf{G}^{\text{inh}}$ ,  $\mathbf{G}^{\text{ext}}$ ,  $\mathbf{G}^{\text{th}}$  sont les forces configurationnelles associées respectivement à l'inhomogénéité, à la force volumique et à l'effet thermique (Maugin [1995, 2002b], Cleja-Tigoiu et Maugin [2000] et Gross et al. [2003]). Ces grandeurs sont définies par :

$$\mathcal{P} = -\mathbf{F}^T \mathbf{P} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{G}^{\text{inh}} = \frac{1}{2} (\text{Grad } \rho_0) \mathbf{v}^2 - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\text{explicite}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\text{explicite}} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{G}^{\text{ext}} = -\mathbf{F}^T \bar{\mathbf{B}} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{G}^{\text{th}} = S \text{Grad } T \quad (4.31)$$

Dans le cas statique et à l'absence de force de volume,  $\mathcal{P} = \mathbf{0} = \mathbf{G}^{\text{ext}}$ . Par ailleurs, pour les processus isothermes ou lorsque la température est uniforme au sein du matériau, l'équation (4.25) devient simplement :

$$\text{Div } \Sigma + \mathbf{G}^{\text{inh}} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \Sigma = W\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi} \quad (4.32)$$

Finalement, si le matériau est homogène, nous obtenons la loi de conservation matérielle :

$$\text{Div } \Sigma = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

### 4.3.2 Extension au cas inélastique

A présent, nous allons nous intéresser au cas inélastique afin de prendre en compte les phénomènes dissipatifs. Par simplicité, nous allons uniquement traiter le cas statique sans force de volume. Les développements suivants sont le fruit de la synthèse des travaux de Maugin [2000, 2002a, 2003, 2002b, 2006], Cleja-Tigoiu et Maugin [2000], Steinmann [2000, 2002], Gross et al. [2003] et Menzel et Steinmann [2005]. La prise en compte de comportement inélastique dans la densité d'énergie de déformation se traduit par :

$$W = W(\mathbf{F}, \mathbf{X}, T, \alpha) \quad (4.34)$$

Dans cette expression, une variable interne  $\alpha$  est introduite afin de représenter l'origine des processus irréversibles. Selon la nature du phénomène à modéliser, elle peut être scalaire, vectorielle ou tensorielle. En considérant le gradient de  $W$  par rapport aux coordonnées initiales



et en suivant la même procédure que dans le cas élastique, il peut être montré que l'équation matérielle du mouvement s'écrit :

$$\text{Div } \Sigma + \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (4.35)$$

avec :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{\text{inh}} + \mathbf{G}^{\text{th}} + \mathbf{G}^{\text{ine}} \quad (4.36)$$

où :

$$\mathbf{G}^{\text{ine}} = A \text{Grad } \alpha \quad \text{et} \quad A = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} \quad (4.37)$$

sont respectivement les forces configurationnelle et thermodynamique associées au comportement inélastique. Si  $\alpha$  représente le tenseur gradient de la transformation inélastique,  $\mathbf{F}_i$ , issu de la décomposition multiplicative  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_i$  comme l'a proposée Lee [1969] dans le cas de la plasticité et Sidoroff [1974] dans le cas de la viscoélasticité, l'équation (4.37) devient :

$$\mathbf{G}^{\text{ine}} = \mathbf{A} : \text{Grad } \mathbf{F}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}_i} \quad (4.38)$$

De nombreuses applications des forces configurationnelles, e.g. thermomécanique de la rupture, élastodynamique ou encore électromagnétisme, sont discutées dans Maugin [1995].

## 4.4 Contrainte configurationnelle

Dans cette section, notre attention se porte plus particulièrement sur les propriétés du tenseur des contraintes configurationnelles. Dans un premier temps, une définition géométrique de la contrainte configurationnelle proposée par Epstein et Maugin (voir principalement Epstein et Maugin [1990, 1996] et Maugin et Epstein [1998]) est présentée. Ensuite, une étude bibliographique concernant la signification physique des composantes du tenseur de contrainte configurationnelle est dressée. A notre connaissance, très peu d'études ont été menées dans ce sens, néanmoins, nous pouvons citer les travaux de Kienzler et Herrmann [1997, 2000] qui traitent le cas élastique linéaire. Ici notre développement pour identifier la signification physique des composantes du tenseur de contrainte configurationnelle est effectué dans le cadre des grandes transformations. Enfin, des applications de la contrainte configurationnelle sont brièvement discutées.

### 4.4.1 Définition géométrique

Considérons un corps solide élastique  $\mathcal{B}$  dans la configuration de référence ( $\mathcal{C}_R$ ) composé de points matériels. Le comportement mécanique du corps est caractérisé par une densité d'énergie de déformation,  $W$ , définie par unité de volume de cette configuration :

$$W = W(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \quad (4.39)$$

D'après Epstein et Maugin [1990], il existe en fait un état naturel libre de contrainte en tout point matériel du corps  $\mathcal{B}$ . Pour les auteurs, ce dernier est appelé "cristal de référence" ( $\mathcal{C}_c$ ).

Soit,  $\mathbf{K}$  le gradient qui transforme le cristal de référence à l'état du point  $\mathbf{X}$  dans  $(\mathcal{C}_R)$  comme le montre figure 4.5. Nous pouvons donc écrire (Maugin et Epstein [1998]) :

$$W = W(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = J_K^{-1} \hat{W}(\mathbf{FK}(\mathbf{X}), \mathbf{X}) = \bar{W}(\mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{X}) \quad (4.40)$$

avec  $J_K = \det \mathbf{K}$ .  $\hat{W}$  est la densité d'énergie de déformation par unité de volume du cristal de référence. A la différence de la transformation  $\mathbf{F}$ , il convient de souligner que les applications

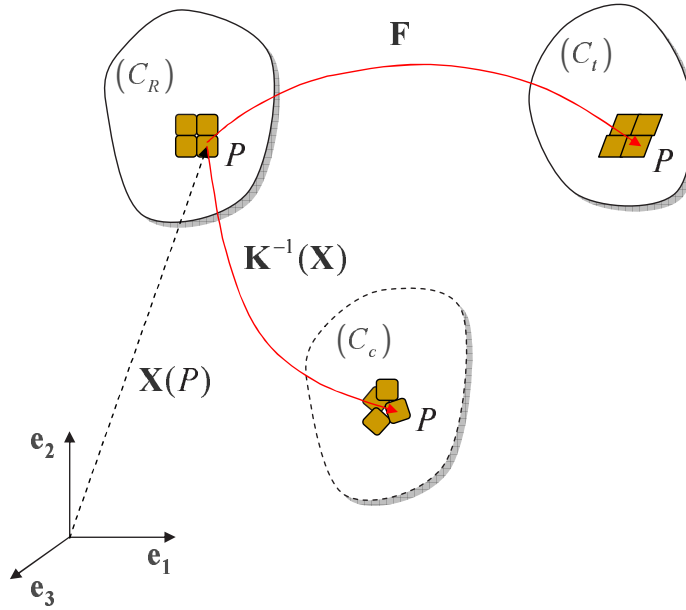


Fig. 4.5: Différentes configurations (Epstein et Maugin [1990]) : configuration de référence  $(\mathcal{C}_R)$ , cristaux de référence  $(\mathcal{C}_c)$  et configuration actuelle  $(\mathcal{C}_t)$ .

$\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{X})$  ne sont pas nécessairement intégrables (Maugin [1993]). Dans l'équation (4.40), la dépendance du point matériel est mise en évidence de deux façons : au travers de  $\mathbf{K}(\mathbf{X})$  et explicitement par rapport à  $\mathbf{X}$ . La contrainte de Piola-Kirchhoff I est simplement :

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{F}} \quad (4.41)$$

En utilisant la symétrie de la contrainte de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \boldsymbol{\pi} \mathbf{F}^T$ , on obtient la condition :

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \boldsymbol{\pi}^T \quad (4.42)$$

De façon analogue, intéressons nous à présent à la définition de :

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = -\frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{K}} \quad (4.43)$$

On peut montrer, en utilisant l'identité  $\partial W / \partial (\mathbf{FK}) = J_K \boldsymbol{\pi} \mathbf{K}^{-1}$  et quelques manipulations tensorielles, que :

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = (\mathbf{W}\mathbf{I} - \mathbf{F}^T \boldsymbol{\pi}) \mathbf{K}^{-T} = (\mathbf{W}\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{S}) \mathbf{K}^{-T} = \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{K}^{-T} \quad (4.44)$$

ou encore :

$$\Sigma = -\frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{K}} \mathbf{K}^T \quad (4.45)$$

où  $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\pi}$  est la contrainte de Piola-Kirchhoff II et  $\mathbf{C}$  est le tenseur des dilatations de Cauchy-Green à droite. Comme le souligne [Maugin \[2003\]](#), cette relation, initialement introduite par [Epstein et Maugin \[1990\]](#), propose une définition géométrique de la contrainte configurationnelle  $\Sigma$  au travers de la notion de réarrangement structural local même si l'expression finale de  $\Sigma$  est indépendante de  $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ . Une conséquence directe de l'équation (4.42) est la symétrie de  $\Sigma$  relativement à  $\mathbf{C}$ , i.e. :

$$\Sigma \mathbf{C} = \mathbf{C} \Sigma^T \quad (4.46)$$

De plus, dans le cas d'un matériau isotrope, les tenseurs  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$  sont coaxiaux et commutent,  $\Sigma$  est alors symétrique :

$$\Sigma = \Sigma^T \quad (4.47)$$

## 4.4.2 Interprétation physique de composantes

Portons à présent notre attention sur l'interprétation physique des composantes du tenseur des contraintes configurationnelles. La signification physique en élasticité linéaire a été proposée dans [Kienzler et Herrmann \[1997, 2000\]](#). Ici, comme nous l'avons fait précédemment pour le problème d'Eshelby (section 4.2.1), nous examinons ce point dans le cadre des grandes transformations.

Considérons un volume matériel unitaire arbitraire contenu dans le corps élastique  $\mathcal{B}$  dans la configuration non-déformée (4.6). Supposons que ce volume soit translaté selon le vecteur infinitesimal  $-\delta \mathbf{U}$  de l'état A à l'état B dans la configuration non-déformée. En effectuant la même procédure qu'Eshelby, sans la présence de force volumique, on peut montrer que le changement d'énergie totale associé à cette translation matérielle est donné par (voir l'équation (4.9)) :

$$\delta \Pi = -\delta \mathbf{U} \cdot \int_{S_0} \Sigma \mathbf{N}_0 dA_0 \quad (4.48)$$

Si l'on s'intéresse à une surface  $S_0$  orientée suivant  $\mathbf{e}_i$  qui est déplacée selon  $-\delta \mathbf{U} = -\delta U \mathbf{e}_j$ , on a donc :

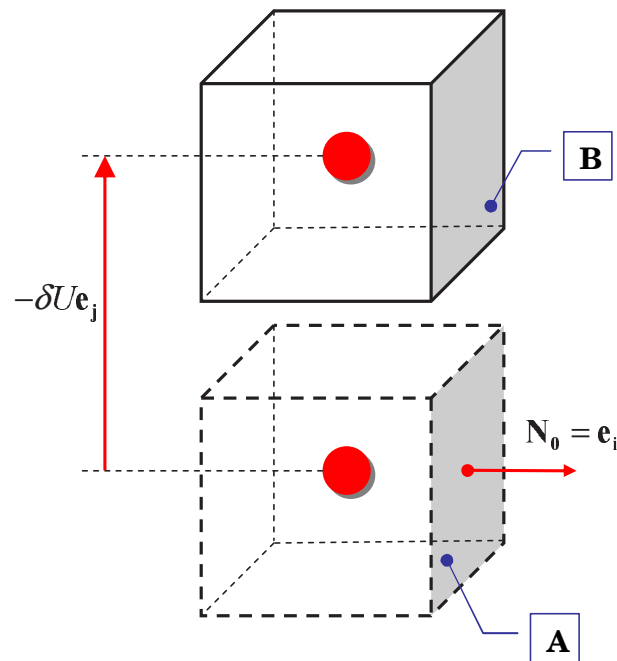
$$\begin{aligned} \delta \Pi &= -\delta U \mathbf{e}_j \cdot \int_{S_0} \Sigma \mathbf{e}_i dA_0 \\ &= -\delta U \mathbf{e}_j \cdot \left[ \int_{S_0} \Sigma dA_0 \right] \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (4.49)$$

De plus, si  $S_0$  est suffisamment petite pour que  $\Sigma$  soit constant sur  $S_0$ , l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= -\delta U [\mathbf{e}_j \cdot \Sigma \mathbf{e}_i] S_0 \\ &= -\delta U \Sigma_{ij} S_0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Finalement on obtient :

$$\Sigma_{ij} = -\frac{1}{S_0} \frac{\delta \Pi}{\delta U} \quad (4.51)$$



**Fig. 4.6:** Translation matérielle d'un volume élémentaire de l'état A à l'état B dans la configuration non-déformée.

A la lumière de ce résultat, l'interprétation physique des composantes  $\Sigma_{ij}$  est donc :

*La composante  $\Sigma_{ij}$  du tenseur de la contrainte configurationnelle est un scalaire qui représente la variation d'énergie due à une translation matérielle unitaire de la surface unitaire de normale  $e_i$  dans la direction  $e_j$ .*

### 4.4.3 Applications de la contrainte configurationnelle

Dans la plupart des études réalisées, la contrainte configurationnelle est utilisée sous la forme d'une intégrale de contour, indépendante du chemin d'intégration (après contraction avec la normale à ce contour) qui permet de déterminer les forces configurationnelles qui s'exercent sur des singularités aussi diverses qu'un front de fissure, des dislocations, des inclusions ou des interfaces. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, les forces configurationnelles généralisent le concept du taux de restitution d'énergie de la mécanique de la rupture défini notamment par l'intégrale  $J$  (Rice [1968]). La contrainte configurationnelle est donc le plus souvent employée sous sa forme intégrée et rares sont les travaux qui s'intéressent à ses propriétés locales. Nous avons également vu qu'en fait, la signification physique des composantes du tenseur des contraintes configurationnelles n'est discutée que depuis l'étude de Kienzler et Herrmann [1997]. Par la suite, les invariants de la contrainte configurationnelle sont utilisés pour prédire la longueur et la direction de fissuration (Atkinson et Aparicio [1999]) et ses composantes ont servi à l'élaboration d'un critère local de rupture (Kienzler et Herrmann [2002]).

# Chapitre 5

## Construction d'une nouvelle grandeur prédictive

### Sommaire

---

|                                                   |           |
|---------------------------------------------------|-----------|
| <b>5.1 Introduction</b>                           | <b>67</b> |
| <b>5.2 Construction générale</b>                  | <b>68</b> |
| 5.2.1 Cas élastique                               | 70        |
| 5.2.2 Cas inélastique                             | 73        |
| 5.2.3 Prise en compte de l'histoire de chargement | 77        |
| <b>5.3 Conclusion</b>                             | <b>81</b> |

---

### 5.1 Introduction

Après la précédente introduction concernant la mécanique configurationnelle, notre discussion porte à présent sur le développement d'une grandeur prédictive pour estimer la durée de vie en fatigue des élastomères. Cette étude est motivée par le fait que les grandeurs prédictives couramment utilisées dans la littérature ne sont pas pertinentes pour traiter les problèmes multiaxiaux (Mars et Fatemi [2002]). Comme nous l'avons souligné dans l'étude bibliographique (chapitre 2), la fin de vie de pièces élastomères est définie par l'apparition d'une fissure macroscopique en surface de l'éprouvette. Ceci correspond en fait à la propagation de fissures à l'échelle microscopique. Ainsi, l'endommagement en fatigue est issu de la croissance de défauts sous sollicitations mécaniques. Nous avons également vu que ces défauts peuvent être initialement présents au sein du matériau vierge de toute sollicitation mécanique, ou bien apparaître dès le premier cycle du fait du chargement appliqué.

A la lumière de ces observations, le premier enjeu dans le développement d'une grandeur prédictive est la prise en compte de ce phénomène. Jusqu'à ce jour, seule l'approche de Mars [2001] tient compte de ce phénomène. En effet, l'auteur considère que l'élastomère est peuplé de défauts microscopique pouvant être vus comme autant de micro-fissures qui croissent sous sollicitation mécanique. Ensuite, il introduit une grandeur appelée "densité d'énergie de fissuration" (Cracking Energy Density, CED, en anglais) (Mars [2002]) qui représente la partie

de l'énergie contribuant à la croissance des micro-défauts. Notons que cette définition est proche de l'interprétation physique des composantes du tenseur des contraintes configurationnelles comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent. A notre avis, son approche est intéressante. En revanche, nous sommes plus réservés quant au formalisme proposé par Mars pour définir l'incrément de CED, particulièrement quant à la définition de l'incrément de déformation. Une discussion avec l'auteur lors de la dernière conférence européenne sur les modèles de comportement pour le caoutchouc (*4<sup>th</sup> European Conference on Constitutive Models for Rubber, Stockholm, 2005*) a renforcé notre scepticisme. En effet, le problème se situe au niveau du passage de l'incrément du vecteur de déplacement à celui du vecteur de déformation (voir Mars [2001] pages 134-135).

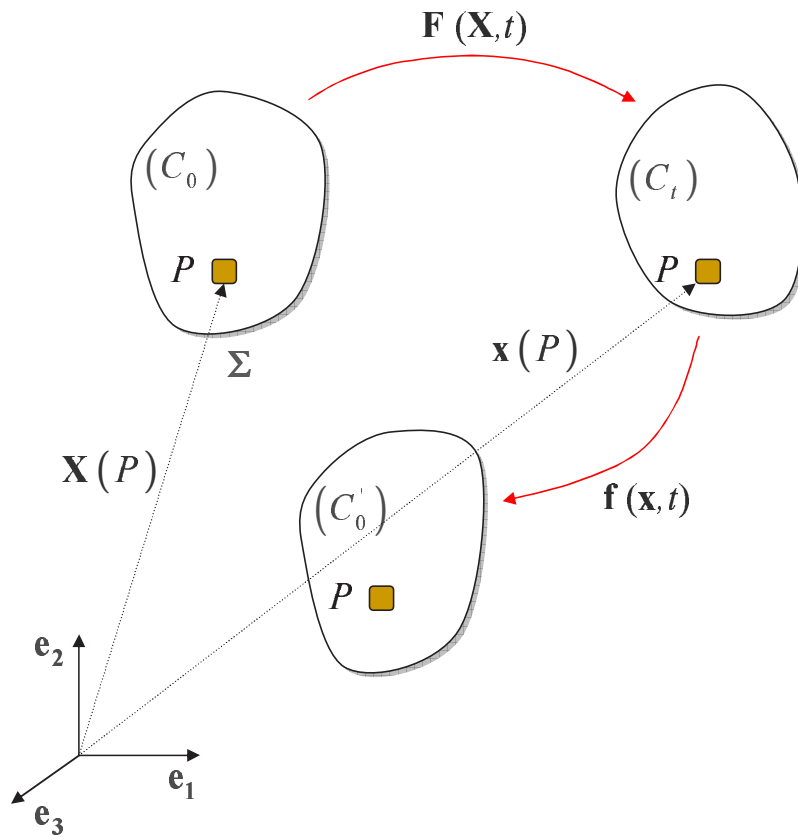
Le second enjeu dans le développement d'une grandeur prédictive est conditionné par son exploitation industrielle, i.e. son implantation dans un code de calcul par élément finis et la définition de critères associés, ce qui restreint sa formulation à une grandeur issue de la mécanique des milieux continus plutôt qu'à une grandeur issue de la mécanique de la rupture. En effet, puisque la distribution des défauts dans les élastomères est aléatoire (Le Cam [2005]), il n'est pas possible (et c'est préférable) de les mailler; il convient donc d'utiliser un modèle homogène. De ce fait, il nous semble que le tenseur de la contrainte configurationnelle, grandeur centrale de la mécanique configurationnelle et dont l'interprétation physique de ses composantes est proche de la définition de la densité d'énergie de fissuration proposée par Mars, se révèle une grandeur mécanique appropriée pour développer une grandeur prédictive pour la durée de vie en fatigue multiaxiale des élastomères.

Dans la section suivante, le développement de notre grandeur prédictive est présenté. Dans un premier temps, nous nous intéressons à la formulation théorique dans le cas élastique non-linéaire en grandes transformations. Puis, son extension au cas inélastique, i.e. pour des processus dissipatifs, est proposée. Finalement, une méthode pour prendre en compte de l'histoire de chargement est développée. Il convient de noter que les formulations présentées dans la suite, généralisent les travaux récemment réalisés dans notre équipe de recherche (Verron [2005] et Verron *et al.* [2006]).

## 5.2 Construction générale

Considérons un corps matériel en caoutchouc  $\mathcal{B}$  dans la configuration de référence ( $\mathcal{C}_0$ ) qui correspond à une configuration libre de contrainte et de déformation (figure 5.1). Supposons qu'aucune force physique volumique ne s'exerce sur  $\mathcal{B}$ . Sous sollicitation mécanique (les effets thermiques ne sont pas pris en compte), le corps se déforme et occupe une suite de configurations physiques. Soit ( $\mathcal{C}_t$ ) et  $\mathbf{F}$  la configuration et le tenseur du gradient de la transformation respectivement à l'instant  $t$ . Un point matériel arbitraire  $P \in \mathcal{B}$  initialement situé en  $\mathbf{X}$  dans ( $\mathcal{C}_0$ ) est déplacé en  $\mathbf{x}$  dans ( $\mathcal{C}_t$ ). Après décharge et une fois l'effet du temps effacé, le corps occupe une nouvelle configuration libre de contrainte ( $\mathcal{C}'_0$ ) définie par le tenseur inverse du tenseur gradient de la transformation  $\mathbf{f}$ .

Cette configuration libre de contrainte correspond à une configuration dite *naturelle* (Rajagopal et Wineman [1992], Rajagopal et Srinivasa [1998a,b]). Selon ces auteurs, un corps peut posséder plus d'une configuration naturelle. Les causes physiques pour lesquelles un corps existe dans différentes configurations naturelles sont diverses. En effet, cette multiplicité des



**Fig. 5.1:** Corps matériel en caoutchouc sous sollicitation mécanique (Andriyana et Verron [2006]).

configurations naturelles est la conséquence de réarrangement micro-structural interne, e.g. mouvement de dislocation dans la plasticité, rupture par clivage dans la propagation de fissure ou cavitation dans la croissance de défauts. Comme proposé par Rajagopal et Srinivasa [2005], les forces configurationnelles sont les forces thermodynamiques motrices associées à l'évolution de configurations naturelles, i.e. au réarrangement micro-structural interne, de  $(C_0)$  à  $(C'_0)$  dans notre cas. Ces forces sont les principales contributions à l'équation du mouvement en description purement matérielle (Maugin [1995]). Ainsi, le réarrangement micro-structural est lié à la contrainte configurationnelle. En outre, en rappelant l'interprétation physique de la contrainte configurationnelle proposée par Kienzler et Herrmann [1997] et discutée dans le chapitre précédent, nous pouvons considérer que cette contrainte contient les quantités phénoménologiques représentant la partie d'énergie disponible pour faire changer les propriétés micro-structurales en un point matériel et dans une direction matérielle donnée. Pour un corps purement élastique sans changement irréversible sous sollicitations mécaniques, la force configurationnelle associée à l'inélasticité,  $\mathbf{G}^{\text{ine}}$  dans l'équation (4.37), est égale à zéro et  $(C'_0)$  et  $(C_0)$  sont identiques. Dans ce cas, la force configurationnelle associée à l'inhomogénéité,  $\mathbf{G}^{\text{inh}}$ , et la contrainte configurationnelle dans l'équation (4.32) ne sont pas nulles en tout point matériel du corps. Par ailleurs, si le corps est homogène en l'absence de singularité, e.g. sans fissure,  $\mathbf{G}^{\text{inh}}$  dans l'équation (4.32) est nulle. Toutefois, cela n'implique pas que la contrainte

configurationnelle soit aussi nulle. Dans ce cas, l'énergie disponible dans le matériau pour faire changer les propriétés de micro-structure due à la sollicitation mécanique est complètement récupérée après déchargement.

Comme l'ont observé expérimentalement [Le Cam et al. \[2004\]](#), un corps en caoutchouc n'est pas tout à fait homogène. En effet, initialement, au repos, il contient déjà des micro-défauts. Sous sollicitations de fatigue, ces défauts évoluent. Leurs configurations changent, i.e. leurs taille, forme et position. Par ailleurs, lorsque le chargement appliqué est suffisamment important, la croissance de micro-défauts peut conduire à l'initiation de fissures macroscopiques. Différents auteurs utilisent différentes valeurs pour la taille critique de fissure. Pour [Xie \[1992\]](#), la taille critique est 3 mm, pour [Le Cam \[2005\]](#) 2 mm, alors que pour [André et al. \[1999\]](#), [Robisson \[2000\]](#), [Saintier \[2000\]](#) et [Ostoja-Kuczynski et al. \[2003\]](#) 1 mm (voir chapitre 2). Ainsi, la durée de vie est définie par le nombre de cycles correspondant à l'apparition de fissure de ces tailles en surface d'éprouvette.

Dans l'objectif d'établir l'expression de notre grandeur prédictive, notée  $\Sigma^*$  dans la suite, notre travail portera donc sur la détermination de taux de restitution d'énergie associés à tous les micro-défauts pouvant exister au sein du matériau. Cela nous permettra de prédire la zone la plus favorable à l'initiation de fissure. Dans un premier temps, nous nous intéressons à la formulation dans le cas élastique non-linéaire en grande déformation. Puis, son extension au cas inélastique est proposée.

### 5.2.1 Cas élastique

Notre attention se concentre sur le point matériel  $P$  du corps  $\mathcal{B}$  dans la configuration de référence ( $\mathcal{C}_0$ ) comme le montre la figure 5.2. A l'échelle de milieu continu, ce corps peut être vu comme homogène, isotrope, incompressible et de comportement hyperélastique. Étant donné qu'un élastomère peut être considéré comme un matériau dont les défauts sont uniformément répartis ([Le Cam \[2005\]](#), [Mars \[2001\]](#)), la probabilité qu'un défaut soit présent est la même en tout point du matériau au repos, dont le point matériel  $P$ . Sous sollicitation mécanique, le défaut change sa configuration et se trouve dans la configuration ( $\mathcal{C}_t$ ). Si le changement micro-structural est réversible, lors du déchargement ce défaut revient en ( $\mathcal{C}_0$ ) et donc  $\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1}$ . Sinon, il occupera une nouvelle configuration ( $\mathcal{C}'_0$ ) caractérisé par un tenseur inverse  $\mathbf{f}$  tel que  $\mathbf{f} \approx \mathbf{F}^{-1}$ .

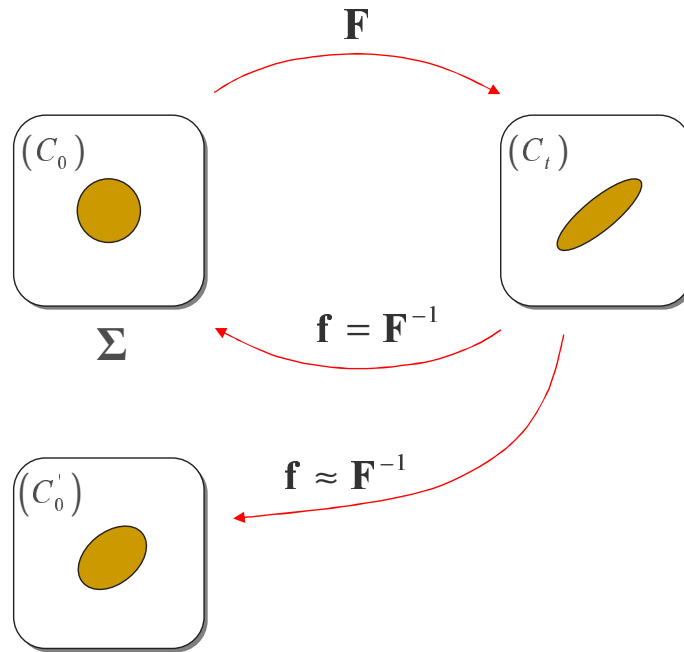
Afin de déterminer le taux de restitution d'énergie d'un défaut, considérons un défaut dans sa configuration initiale ( $\mathcal{C}_0$ ) comme le montre la figure 5.3. En ce point matériel, les propriétés énergétiques du défaut sont complètement définies par la contrainte configurationnelle,  $\Sigma$ . Rappelons la signification physique des composantes  $\Sigma_{ij}$  proposée par [Kienzler et Herrmann \[1997\]](#) : pour une direction donnée  $\boldsymbol{\theta}$ , le scalaire  $(\boldsymbol{\theta} \cdot \Sigma \mathbf{N})$  représente le changement d'énergie au point matériel due à une translation matérielle unitaire dans la direction  $\boldsymbol{\theta}$  d'une surface unitaire de normale  $\mathbf{N}$ . La surface unitaire pour laquelle le maximum d'énergie est restituée est définie par son vecteur normal  $\bar{\mathbf{N}}$  tel que :

$$\|\Sigma \mathbf{N}\| \quad \text{soit maximum pour} \quad \mathbf{N} = \bar{\mathbf{N}} \quad (5.1)$$

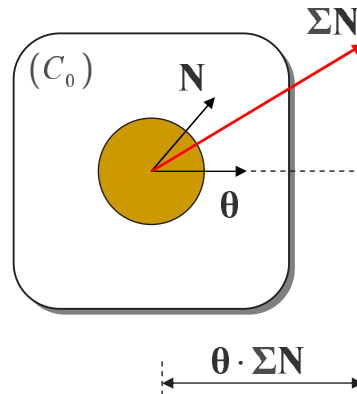
En d'autres termes, la norme du vecteur traction matérielle,  $\|\Sigma \mathbf{N}\|$ , est maximale pour la surface de vecteur normal  $\mathbf{N} = \bar{\mathbf{N}}$ . Étant donné que  $\Sigma$  est symétrique, écrivons :

$$\|\Sigma \mathbf{N}\| = [\mathbf{N} \Sigma^T \Sigma \mathbf{N}]^{\frac{1}{2}} = [\mathbf{N} \Sigma^2 \mathbf{N}]^{\frac{1}{2}} \quad (5.2)$$





**Fig. 5.2:** Detail du point matériel  $P$  contenant un défaut sous sollicitation mécanique (voir figure 5.1) (Andriyana et Verron [2006]).



**Fig. 5.3:** Variation d'énergie due à une translation matérielle unitaire dans la direction  $\theta$  d'une surface unitaire de normale  $\mathbf{N}$  (Andriyana et Verron [2006]).

où  $\Sigma^2$  est un tenseur semi-défini positif. Ainsi, ses valeurs propres, notées  $(\Sigma_i^2)_{i=1,2,3}$ , sont réelles, positives ou nulles et ses trois vecteurs propres sont perpendiculaires entre eux. En fait,  $(\Sigma_i)_{i=1,2,3}$ , sont les valeurs propres de  $\Sigma$ , i.e. :

$$\Sigma = \Sigma_i \mathbf{V}_i \otimes \mathbf{V}_i, \tag{5.3}$$

avec  $(\mathbf{V}_i)_{i=1,2,3}$  les vecteurs propres associés. Ils correspondent aux directions dans lesquelles le taux de restitution d'énergie tend à ouvrir ou à fermer le défaut par traction normale matérielle sans cisaillement matériel. Ainsi,  $\bar{\mathbf{N}}$  est l'un de ces vecteurs propres. De plus, sachant que la

force configurationnelle sur un défaut est définie par l'opposé du gradient de l'énergie totale du corps par rapport au changement de position du défaut et que le corps tend à minimiser son énergie lors de la croissance de défaut, la morphologie du défaut évolue donc dans la direction opposée à cette force, i.e. la traction matérielle doit être de sens opposé au vecteur normal  $\bar{\mathbf{N}}$ . Ceci se traduit par l'expression :

$$\bar{\mathbf{N}}\Sigma\bar{\mathbf{N}} \leq 0 \quad (5.4)$$

De ce fait, la plus petite valeur propre de  $\Sigma$  peut être utilisée pour prédire la croissance des défauts, et  $\bar{\mathbf{N}}$ , le vecteur propre associé, représente la direction normale à l'ouverture du défaut. Si elle est négative, le défaut tend à croître pour former une fissure plane, si elle est positive le défaut se rétracte. Finalement, notre grandeur prédictive,  $\Sigma^*$ , peut être résumée comme suit :

**Proposition 1 : Grandeur prédictive en élasticité**

$$\Sigma^* = \left| \min \left[ (\Sigma_i)_{i=1,2,3}, 0 \right] \right|$$

avec  $(\Sigma_i)_{i=1,2,3}$  sont les valeurs propres de  $\Sigma$

- (i) si  $\Sigma^* > 0$ , les micro-défauts tendent à croître dans le plan de normale  $\bar{\mathbf{N}}$ , le vecteur propre associé à  $-\Sigma^*$ ,
- (ii) si  $\Sigma^* = 0$  les micro-défauts se rétractent.

▷ **Remarque 1**

*Le matériau hyperélastique est caractérisé par l'existence d'une densité d'énergie de déformation,  $W$ , dont la contrainte de Cauchy,  $\sigma$ , dérive (voir chapitre 1) :*

$$\begin{aligned} \sigma &= -p\mathbf{I} + 2\frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}}\mathbf{B} \\ &= -p\mathbf{I} + 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{B} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{B}^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

*où  $I_1, I_2$  sont les deux premiers invariants du tenseur des dilatations de Cauchy-Green à gauche,  $\mathbf{B}$ , et  $p$  est la pression hydrostatique arbitraire qui traduit l'hypothèse de l'incompressibilité. Sachant que le lien entre la contrainte de Cauchy et la contrainte de Piola-Kirchoff II,  $\mathbf{S}$ , est donné par  $\sigma = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T$ , avec  $J = 1$  pour un matériau incompressible, la contrainte configurationnelle s'écrit :*

$$\Sigma = (W + p)\mathbf{I} - 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial W}{\partial I_2}\right)\mathbf{C} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\mathbf{C}^2 \quad (5.6)$$

*où  $\mathbf{C}$  le tenseur des dilatations de Cauchy-Green à droite.*

▷ **Remarque 2**

*$\mathbf{S}$  et  $\mathbf{C}$  étant coaxiaux, pour des matériaux hyperélastique isotropes, les valeurs principales de  $\Sigma$  sont liées à celles de  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{C}$  par :*

$$\Sigma_i = W - S_i\lambda_i^2 \quad (5.7)$$

où les  $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$  sont les élongations principales. Puisque  $S_i$  augmente avec  $\lambda_i$ , la valeur principale minimale de la contrainte configurationnelle est donnée par :

$$\Sigma_{min} = W - S_{max}\lambda_{max}^2 \quad (5.8)$$

$S_{max}$  et  $\lambda_{max}$  étant les valeurs principales maximales de  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{C}$  respectivement. Les vecteurs propres de  $\Sigma$  sont donc ceux de  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{C}$ . Dans le cas où  $\Sigma_{min} < 0$ , la valeur de la grandeur prédictive est donnée par  $\Sigma^* = -\Sigma_{min}$  et le vecteur propre associé qui définit le plan de fissure correspond en fait à l'élongation principale maximale. Ceci est en lien avec des résultats classiques dans la littérature qui lient l'initiation de fissure dans des élastomères avec l'élongation principale maximale. L'orientation du plan de fissuration peut tout aussi bien être définie, en élasticité, sous chargement proportionnel et sans cumul sur le cycle, à partir de grandeurs prédictives classiques telle que  $\lambda_{max}$  ou  $\sigma_{max}$ . De ce fait, la prévision de l'orientation du plan de fissuration est donc une condition nécessaire mais non suffisante pour valider la pertinence d'une grandeur prédictive.

### ▷ Remarque 3

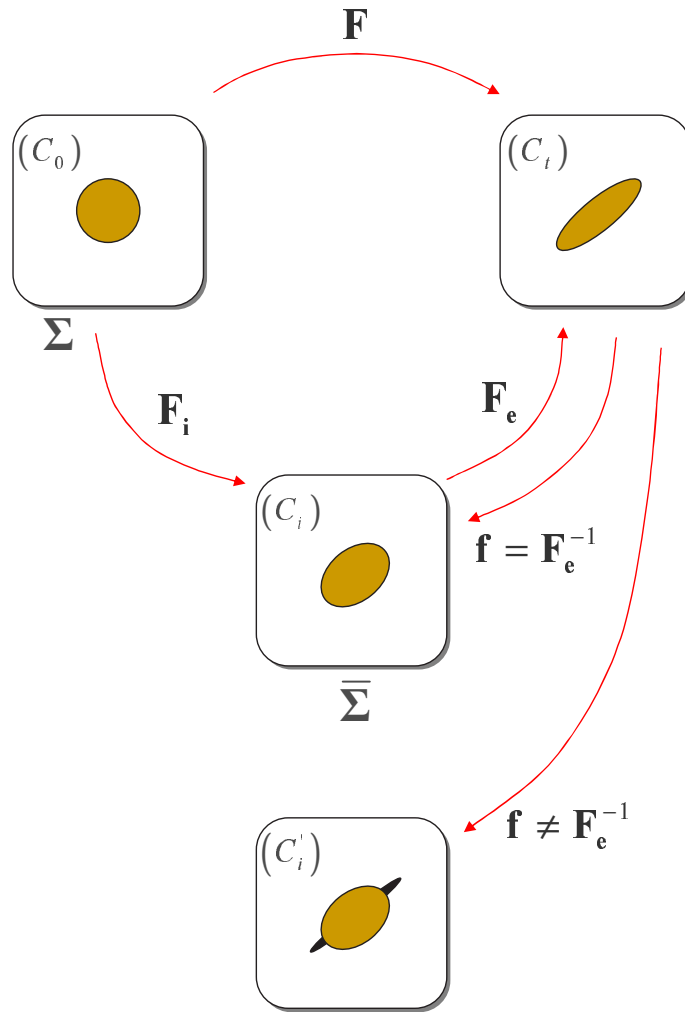
En fait, notre formulation pour introduire une nouvelle grandeur prédictive rationalise l'approche de Mars [2002] qui propose la densité d'énergie de déformation (CED). Celle-ci représente une partie d'énergie libérée lors de la croissance de fissures. L'auteur postule que l'énergie libérée par une surface matérielle donnée de normale  $\mathbf{N}$  est égale au travail des efforts qui s'y appliquent et qui permettent de la déformer. Ainsi, l'incrément de CED,  $dW_c$ , est défini par (voir les équations (3.1)-(3.7)) :

$$dW_c = \mathbf{N}^T (\boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{N} \quad (5.9)$$

Néanmoins, bien que la motivation physique des deux grandeurs soit identique, les travaux de Mars sont plus intuitifs et ne fait pas référence aux concepts de la mécanique configurationnelle. Comme l'a souligné Eshelby [1975] (page 329), les termes de  $W_I$  et  $CS$  dans  $\Sigma$  ne correspondent pas respectivement au changement d'énergie de matériau à l'intérieur de  $S_0$  et au changement d'énergie à l'extérieur de  $S_0$  due à la sollicitation mécanique (voir figure 4.1), et ne peuvent pas être séparés. Par conséquent, l'équation (5.9) n'est pas suffisante pour déterminer le taux de restitution d'énergie mis en jeu lors de la croissance de défauts. Ainsi, comme nous venons de le démontrer, une formulation rigoureuse nécessite l'utilisation de la mécanique configurationnelle.

## 5.2.2 Cas inélastique

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, des phénomènes inélastiques tels que l'effet Mullins et l'hystérésis peuvent être mis en évidence dans les élastomères sous chargement cyclique. Dans cette section, une modification dans la formulation de notre grandeur prédictive est proposée afin de prendre en compte les phénomènes dissipatifs. Pour cela, considérons le même point matériel  $P$  qui constitue le corps  $\mathcal{B}$  comme le montre la figure 5.4. Supposons que ce corps présente un comportement inélastique. Sous sollicitation mécanique, la configuration du défaut passe de  $(\mathcal{C}_0)$  à  $(\mathcal{C}_t)$ . Comme l'a proposé Lee [1969] dans le cas de la plasticité en grandes transformations et Sidoroff [1974] dans le cas de la viscoélasticité en



**Fig. 5.4:** Point matériel  $P$  de corps inélastique contenant un défaut sous sollicitation mécanique (Andriyana et Verron [2006]).

grandes transformations, introduisons une décomposition multiplicative du tenseur gradient de la transformation en parties élastique  $\mathbf{F}_e$  et inélastique  $\mathbf{F}_i$  :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_i \quad (5.10)$$

Ici, le tenseur  $\mathbf{F}_i$  permet de définir la configuration intermédiaire  $(C_i)$ . Il convient de noter que cette décomposition n'est pas unique et ne peut en général pas être obtenue expérimentalement (Huber et Tsakmakis [2000]). Une configuration intermédiaire possible est la configuration libre de contrainte obtenue par une décharge élastique infiniment rapide de la configuration déformée  $(C_t)$ . Après décharge et une fois l'effet du temps effacé, le micro-défaut se trouve dans une configuration libre de contrainte  $(C'_i)$  qui est en général différente de  $(C_i)$ . Supposons que la densité d'énergie de déformation s'écrive (Gross et al. [2003]) :

$$W = W(\mathbf{F}, \mathbf{F}_i) = J_i \bar{W}(\mathbf{F}_e) = J_i \bar{W}(\mathbf{F} \mathbf{F}_i^{-1}) \quad (5.11)$$

où  $J_i = \det \mathbf{F}_i$ ,  $W$  et  $\bar{W}$  sont les densités d'énergie de déformation par unité de volume dans les configurations initiale ( $\mathcal{C}_0$ ) et intermédiaire ( $\mathcal{C}_i$ ) respectivement. Notons que  $\mathbf{F}_i$  remplace  $\mathbf{K}^{-1}$  dans l'équation (4.40). Deux hypothèses seront utilisées dans la suite :

- Le changement de configuration (la croissance) de micro-défauts suit la loi d'évolution des variables internes  $\dot{\mathbf{F}}_i$  ou  $\mathbf{L}_i = \dot{\mathbf{F}}_i \mathbf{F}_i^{-1}$  ;
- Ce changement (cette croissance) est piloté(e) par la contrainte configurationnelle effective,  $\bar{\Sigma}$ , dont la nature reste à déterminer.

En considérant la dissipation uniquement due à la déformation inélastique, l'expression de la dissipation par unité de volume de la configuration initiale,  $\mathcal{D}$ , est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \boldsymbol{\pi} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{W} \\ &= \boldsymbol{\pi} : \dot{\mathbf{F}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}_i} : \dot{\mathbf{F}}_i \\ &= -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}_i} : \dot{\mathbf{F}}_i \end{aligned} \quad (5.12)$$

où  $\boldsymbol{\pi}$  est la contrainte de Piola-Kirchhoff I. Afin de développer cette expression, et au regard de l'équation (5.11), calculons d'abord :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}_i} &= \frac{\partial (J_i \bar{W})}{\partial \mathbf{F}_i} = \bar{W} \frac{\partial J_i}{\partial \mathbf{F}_i} + J_i \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{F}_i} \\ &= J_i \bar{W} \mathbf{F}_i^{-\top} + J_i \frac{\partial \bar{W}}{\partial (\mathbf{F} \mathbf{F}_i^{-1})} : \frac{\partial (\mathbf{F} \mathbf{F}_i^{-1})}{\partial \mathbf{F}_i} \\ &= W \mathbf{F}_i^{-\top} + J_i \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{F}_e} : \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{F}_i^{-1}}{\partial \mathbf{F}_i} \\ &= W \mathbf{F}_i^{-\top} + J_i \mathbf{F}^\top \bar{\boldsymbol{\pi}} : \frac{\partial \mathbf{F}_i^{-1}}{\partial \mathbf{F}_i} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Dans cette expression, nous avons introduit la contrainte de Piola-Kirchhoff exprimée dans la configuration intermédiaire,  $\bar{\boldsymbol{\pi}} = \partial \bar{W} / \partial \mathbf{F}_e = J_i^{-1} \boldsymbol{\pi} \mathbf{F}_i^\top$ . En utilisant une manipulation simple d'algèbre tensorielle (voir par exemple [Holzapfel \[2000\]](#) ou [Ehlers \[2006\]](#)), l'équation précédente devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}_i} &= W \mathbf{F}_i^{-\top} + \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\pi} \mathbf{F}_i^\top : \frac{\partial \mathbf{F}_i^{-1}}{\partial \mathbf{F}_i} \\ &= W \mathbf{F}_i^{-\top} - \mathbf{F}_i^{-\top} (\mathbf{F}^\top \boldsymbol{\pi} \mathbf{F}_i^\top) \mathbf{F}_i^{-\top} \\ &= \mathbf{F}_i^{-\top} (W \mathbf{I} - \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\pi}) \\ &= \mathbf{F}_i^{-\top} \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned} \quad (5.14)$$

et la dissipation s'exprime alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= -\mathbf{F}_i^{-\top} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{F}}_i = -\mathbf{F}_i^{-\top} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L}_i \mathbf{F}_i \\ &= -\text{tr} (\mathbf{F}_i^{-\top} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}_i^\top \mathbf{L}_i^\top) = -\mathbf{F}_i^{-\top} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}_i^\top : \mathbf{L}_i \\ &= -\bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \mathbf{L}_i \end{aligned} \quad (5.15)$$

avec  $\mathbf{L}_i = \dot{\mathbf{F}}_i \mathbf{F}_i^{-1}$  le tenseur gradient du champ des vitesses eulérien inélastique et  $\bar{\Sigma} = \mathbf{F}_i^{-T} \Sigma \mathbf{F}_i^T$  la contrainte configurationnelle exprimée dans la configuration intermédiaire. Comme nous l'avons démontré,  $\bar{\Sigma}$  est la force thermodynamique associée à  $\mathbf{L}_i$ . A la lumière de ce résultat, nous constatons donc que la croissance de micro-défauts est pilotée par la contrainte configurationnelle exprimée dans la configuration intermédiaire. Ainsi, notre grandeur prédictive dans le cas inélastique devient :

**Proposition 2 : Grandeur prédictive en inélasticité**

$$\Sigma^* = \left| \min \left[ (\bar{\Sigma}_i)_{i=1,2,3}, 0 \right] \right|$$

avec  $(\bar{\Sigma}_i)_{i=1,3}$  sont les valeurs propres de  $\bar{\Sigma} = \mathbf{F}_i^{-T} \Sigma \mathbf{F}_i^T$

- (i) si  $\Sigma^* > 0$ , les micro-défauts tendent à croître dans le plan de normale  $\bar{\mathbf{N}}$ , le vecteur propre associé à  $-\Sigma^*$ ,
- (ii) si  $\Sigma^* = 0$  les micro-défauts se rétractent.

▷ **Remarque 4**

*Il convient de noter que  $\bar{\Sigma}$  n'est en général pas un tenseur symétrique. Il peut donc admettre des valeurs propres non-réelles. Afin de les exclure, une restriction supplémentaire peut être imposée : on considère seulement la partie symétrique de  $\bar{\Sigma}$ , i.e. :*

$$\bar{\Sigma}_{sym} = \frac{\bar{\Sigma} + \bar{\Sigma}^T}{2} \quad (5.16)$$

*Cette restriction n'est pas fondée sur des principes physiques ou théoriques et n'a pas été testée dans ce travail. Des travaux supplémentaires sont nécessaires pour établir sa possible validité.*

▷ **Remarque 5**

*Nous avons utilisé la configuration intermédiaire afin d'exprimer la contrainte configurationnelle effective,  $\bar{\Sigma}$ , qui pilote la croissance de micro-défauts. Néanmoins, étant donné que la décomposition  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_i$  n'est pas unique, des études complémentaires sont nécessaires afin de choisir la formulation la plus appropriée (Andriyana et Verron [2006]).*

▷ **Remarque 6**

*Si l'inélasticité est une manifestation du comportement viscoélastique, un modèle viscoélastique classique en grandes transformations peut être utilisé. Supposons que la densité d'énergie de déformation est donnée par  $W = W(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e)$ , avec  $\mathbf{B}_e = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e^T$ . Ainsi, la contrainte de Cauchy s'écrit (Green et Tobolsky [1946], Huber et Tsakmakis [2000]) :*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_{\text{équilibre}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{hors-équilibre}} = -p \mathbf{I} + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{B}_e} \mathbf{B}_e \right) \\ &= -p \mathbf{I} + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{B} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^2 + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial W}{\partial I_2^e} \right) \mathbf{B}_e - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2^e} \mathbf{B}_e^2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ici,  $I_1^e$  et  $I_2^e$  sont les deux premiers invariants de  $\mathbf{B}_e$ . La contrainte configurationnelle devient :

$$\begin{aligned} \Sigma = (W + p) \mathbf{I} - 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{C} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C}^2 \\ - 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial W}{\partial I_2^e} \right) \mathbf{C}_i^{-1} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2^e} \mathbf{F}_i^{-1} \mathbf{C}_e \mathbf{F}_i^{-T} \end{aligned} \quad (5.18)$$

et finalement, la contrainte configurationnelle effective s'exprime :

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} = (W + p) \mathbf{I} - 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{F}_i^{-T} \mathbf{C} \mathbf{F}_i^T + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{F}_i^{-T} \mathbf{C}^2 \mathbf{F}_i^T \\ - 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1^e} + I_1^e \frac{\partial W}{\partial I_2^e} \right) \mathbf{B}_i^{-1} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2^e} \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{C}_e \end{aligned} \quad (5.19)$$

avec  $\mathbf{B}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^T$ ,  $\mathbf{C}_i = \mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i$  et  $\mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e$ .

#### ► Remarque 7

Dans le cas de la plasticité, les dislocations peuvent être considérées comme la distribution de micro-défauts dans l'ensemble du volume de matériau. Nous avons donc  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_p$ , avec  $\mathbf{F}_p$  le tenseur du gradient de la transformation plastique. Ainsi, la contrainte configurationnelle dans la configuration intermédiaire,  $\bar{\Sigma}$ , est énergétiquement conjuguée à l'écoulement plastique,  $\mathbf{L}_p$ . Ce résultat a été également mis en évidence par [Cleja-Tigoiu et Maugin \[2000\]](#), [Cermelli et al. \[2001\]](#), [Gross et al. \[2003\]](#) et [Maugin \[2003\]](#). Par ailleurs, lorsque l'écoulement plastique se fait sans la variation de volume,  $\bar{\Sigma}$  se réduit à la contrainte de Mandel exprimée dans la configuration intermédiaire,  $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{F}_e^T \boldsymbol{\pi} \mathbf{F}_p^T$ .

### 5.2.3 Prise en compte de l'histoire de chargement

Jusqu'à présent, seule la valeur instantanée de la contrainte configurationnelle a été considérée comme grandeur prédictive. Cependant, l'histoire du chargement n'a pas encore été prise en compte. Dans la plupart de cas, les pièces industrielles en élastomère sont soumises à des chargements multiaxiaux non-proportionnels, le niveau d'endommagement subi par les pièces dépend donc de l'histoire de chargement. Ainsi, sa prise en compte dans le calcul d'une grandeur prédictive efficace est primordiale. Un exemple de chargement multiaxial non-proportionnel est présenté sur la figure 5.5. La fatigue consistant en des milliers de cycles de chargement, le cumul d'endommagement le long de toute l'histoire du chargement est irréaliste. Néanmoins, étant donné que les élastomères présentent une réponse stabilisée après un certain nombre de cycles ([André et al. \[1999\]](#), [Abraham et al. \[2005\]](#)), nous considérons ici que le cumul au cours d'un seul cycle stabilisé est suffisant pour prédire la durée de vie.

Dans la suite, nous proposons une méthode de calcul appropriée pour cumuler la contrainte configurationnelle au cours d'un cycle. Le cumul est effectué uniquement sur la partie de la contrainte configurationnelle qui contribue à la croissance de micro-défauts pour chaque incrément de chargement, qui sera notée  $d\Sigma^d$ . Soit  $\Sigma^d$  la contrainte configurationnelle cumulée lors d'un cycle, nous avons donc :

$$\Sigma^d = \int_{\text{cycle}} d\Sigma^d \quad (5.20)$$

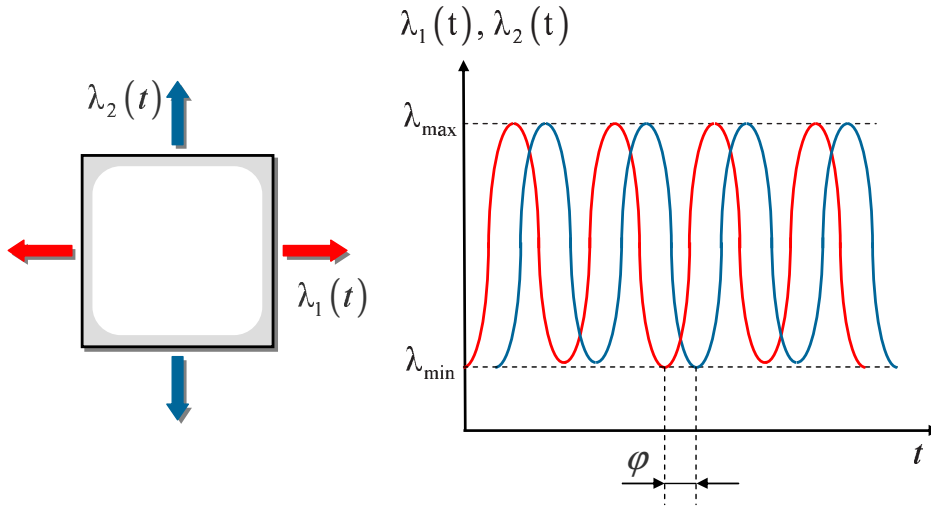


Fig. 5.5: Chargement non-proportionnel.

L'expression de  $d\Sigma^d$  est déterminée à partir de la valeur instantanée de l'incrément de la contrainte configurationnelle,  $d\Sigma$ . Dans la suite, deux méthodes pour prendre en compte de l'histoire de chargement sont proposées : la première méthode qui est plutôt adaptée au cas élastique et la deuxième qui est plus appropriée pour le cas inélastique. Il convient de souligner que des travaux complémentaires seront nécessaires pour vérifier la validité de ces deux méthodes. Aujourd'hui, nous n'avons pas déterminé laquelle des deux méthodes est la plus efficace.

### 5.2.3.1 Cumul en élasticité

En élasticité,  $\Sigma$  dépend uniquement de  $C$  (voir l'équation (5.6)). Son incrément s'écrit :

$$d\Sigma = \frac{d\Sigma}{dC} : \dot{C} dt \quad (5.21)$$

En effectuant une décomposition spectrale de  $d\Sigma$ , nous obtenons :

$$d\Sigma = d\Sigma_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad (5.22)$$

où  $(d\Sigma_i)_{i=1,2,3}$  et  $(\mathbf{v}_i)_{i=1,2,3}$  sont les valeurs propres et leurs vecteurs propres associés. Ensuite, la partie de la contrainte configurationnelle qui contribue à la croissance de micro-défauts pour chaque incrément de chargement,  $d\Sigma^d$ , est choisie simplement comme :

$$d\Sigma^d = \min(d\Sigma_i, 0) \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad (5.23)$$

Puisque l'intégration de  $d\Sigma^d$  dans l'équation (5.20) ne peut être faite que dans la même base, e.g. dans la configuration initiale, écrivons donc :

$$d\Sigma^d = (d\Sigma_{ij}^d \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)_{i,j=1,2,3} \quad (5.24)$$

Finalement, la prise en compte de l'histoire de chargement dans la formulation de la grandeur prédictive en élasticité s'exprime sous la forme :



**Proposition 3(a) : Prise en compte de l'histoire de chargement en élasticité**

$$\Sigma^* = \left| \min \left[ (\Sigma_i^d)_{i=1,2,3}, 0 \right] \right|$$

avec  $(\Sigma_i^d)_{i=1,2,3}$  sont les valeurs propres de :

$$\Sigma^d = \int_{\text{cycle}} (d\Sigma_{ij}^d \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)_{i,j=1,2,3}$$

où :

$$(d\Sigma_{ij}^d \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)_{i,j=1,2,3} = \min(d\Sigma_i, 0) \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i$$

où  $(d\Sigma_i)_{i=1,2,3}$  et  $(\mathbf{v}_i)_{i=1,2,3}$  sont les valeurs propres et les vecteurs propres de  $d\Sigma = d\Sigma/dC : \dot{C} dt$ .

- (i) si  $\Sigma^* > 0$ , les micro-défauts tendent à croître dans le plan de normale  $\bar{\mathbf{N}}$ , le vecteur propre associé à  $-\Sigma^*$ ,
- (ii) si  $\Sigma^* = 0$  les micro-défauts se rétractent.

▷ **Remarque 8**

*Il convient de noter que le calcul de  $d\Sigma/dC$  est assez difficile puisque  $\Sigma$  dépend explicitement de la pression hydrostatique  $p$  dans le cas d'un matériau incompressible. Plus précisément,  $p$  et sa dérivée par rapport à  $C$  doivent être déterminées à partir des équations d'équilibre. Afin de surmonter ce problème, seul des cas qui admettent des solutions analytiques seront abordés dans la suite de ce travail, i.e. traction uniaxiale, traction équi-biaxiale, torsion simple, traction-torsion en phase et hors-phase.*

### 5.2.3.2 Cumul en inélasticité

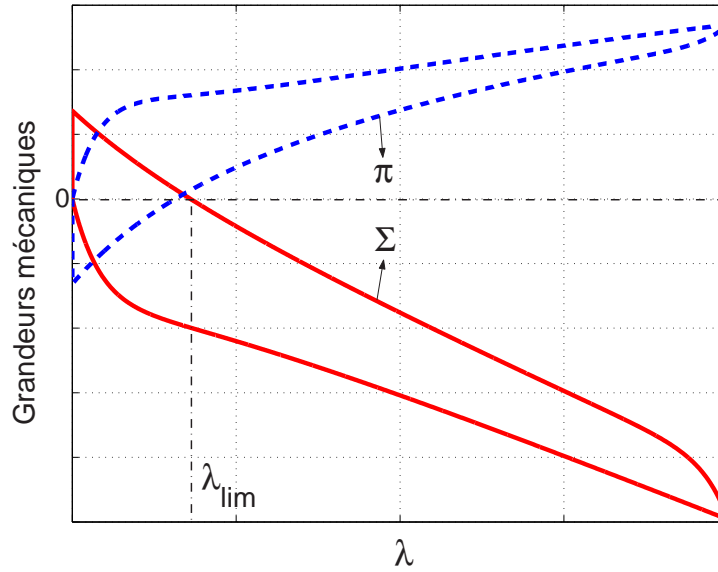
Dans le cas général (inélasticité),  $\Sigma$  dépend de  $C$  et de  $C_e$  (voir l'équation (5.18)). Son incrément s'écrit donc :

$$d\Sigma = \left( \frac{d\Sigma}{dC} : \dot{C} + \frac{d\Sigma}{dC_e} : \dot{C}_e \right) dt \quad (5.25)$$

En effectuant une décomposition spectrale de  $d\Sigma$ , nous obtenons :

$$d\Sigma = d\Sigma_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad (5.26)$$

où  $(d\Sigma_i)_{i=1,2,3}$  et  $(\mathbf{v}_i)_{i=1,2,3}$  sont les valeurs propres et leurs vecteurs propres associés. En inélasticité, même en cas de chargement simple tel que la traction uniaxiale, le cumul doit être fait avec précaution notamment lors de la décharge. La figure 5.6 montre l'évolution des grandeurs mécaniques (contrainte PK1 et contrainte configurationnelle) en fonction de l'élongation en traction uniaxiale. Notons que lors de la décharge, les deux grandeurs changent de signe pour  $\lambda = \lambda_{\text{lim}}$ . Il faut donc exclure les incréments  $d\Sigma$  lors de la décharge pour



**Fig. 5.6:** Evolution des grandeurs mécaniques en fonction d'élongation dans le chargement de traction uniaxiale.

$\lambda < \lambda_{\text{lim}}$  ( $\Sigma > 0$ ) puisqu'ils ne contribuent pas à la croissance de défauts. Pour les chargements multiaxiaux,  $d\Sigma^d$  est choisi simplement en modifiant l'équation (5.26) :

$$d\Sigma^d = |d\Sigma_i^d| \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad (5.27)$$

où :

$$d\Sigma_i^d = \begin{cases} d\Sigma_i & \text{si } \mathbf{v}_i^T \Sigma \mathbf{v}_i < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.28)$$

Il convient de noter que les vecteurs propres de  $\Sigma$  ne sont pas nécessairement ceux de  $d\Sigma$ . Puisque l'intégration du  $d\Sigma^d$  dans l'équation (5.20) ne peut être faite que dans la même base, écrivons donc :

$$d\Sigma^d = (d\Sigma_{ij}^d \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)_{i,j=1,2,3} \quad (5.29)$$

La formulation de la grandeur prédictive en inélasticité nécessite une expression de la contrainte configurationnelle cumulée au cours d'un cycle exprimée dans la configuration intermédiaire,  $\bar{\Sigma}^d$ , (voir la section précédente) :

$$\bar{\Sigma}^d = \mathbf{F}_i^{-T} \Sigma^d \mathbf{F}_i^T = \mathbf{F}_i^{-T} \left[ \int_{\text{cycle}} d\Sigma^d \right] \mathbf{F}_i^T \quad (5.30)$$

Finalement, la prise en compte de l'histoire de chargement dans la formulation de la grandeur prédictive en inélasticité s'exprime sous la forme :

**Proposition 3(b) : Prise en compte de l'histoire de chargement en inélasticité**

$$\Sigma^* = \left| \min \left[ (\bar{\Sigma}_i^d)_{i=1,2,3}, 0 \right] \right|$$

avec  $(\bar{\Sigma}_i^d)_{i=1,2,3}$  sont les valeurs propres de :

$$\bar{\Sigma}^d = \mathbf{F}_i^{-T} \left[ \int_{\text{cycle}} (d\Sigma_{ij}^d \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)_{i,j=1,2,3} \right] \mathbf{F}_i^T$$

où :

$$(d\Sigma_{ij}^d \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)_{i,j=1,2,3} = |d\Sigma_i^d| \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i$$

$$d\Sigma_i^d = \begin{cases} d\Sigma_i & \text{si } \mathbf{v}_i^T \Sigma \mathbf{v}_i < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $(d\Sigma_i)_{i=1,2,3}$  et  $(\mathbf{v}_i)_{i=1,2,3}$  sont les valeurs propres et les vecteurs propres de  $d\Sigma = (d\Sigma/d\mathbf{C} : \dot{\mathbf{C}} + d\Sigma/d\mathbf{C}_e : \dot{\mathbf{C}}_e) dt$ .

- (i) si  $\Sigma^* > 0$ , les micro-défauts tendent à croître dans le plan de normale  $\bar{\mathbf{N}}$ , le vecteur propre associé à  $-\Sigma^*$ ,
- (ii) si  $\Sigma^* = 0$  les micro-défauts se rétractent.

▷ **Remarque 9**

Comme il l'a été évoqué dans la remarque 8, le calcul de  $d\Sigma/d\mathbf{C}$  et  $d\Sigma/d\mathbf{C}_e$  est assez difficile puisque  $\Sigma$  dépend explicitement de la pression hydrostatique  $p$  dans le cas d'un matériau incompressible. Plus précisément,  $p$  et sa dérivée par rapport à  $\mathbf{C}$  et à  $\mathbf{C}_e$  doivent être déterminées à partir des équations d'équilibre. Faute de temps, dans ce travail nous considérons uniquement le cas de la traction uniaxiale.

## 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une grandeur mécanique permettant de prédire la durée de vie en fatigue multiaxiale des élastomères. Celle-ci est motivée par le fait que les grandeurs classiques couramment utilisées, i.e. l'élongation principale maximale, la contrainte principale maximale ou la densité d'énergie de déformation ne sont pas pertinentes dans les cas des chargements multiaxiaux. Ici, nous avons considéré une grandeur qui prend en compte les mécanismes physiques d'endommagement et qui permet une formulation de type mécanique des milieux continus ne nécessitant pas la prise en compte explicite des défauts qui existent au sein de matériau ; nous avons donc exploité les propriétés de la contrainte configurationnelle. La formulation de cette grandeur prédictive a été effectuée dans les cadres élastique et inélastique. Dans ce dernier cas, il a été établi que la croissance de défauts est pilotée par la contrainte configurationnelle exprimée dans la configuration intermédiaire. Enfin, une méthode

de cumul pour la prise en compte de l'histoire de chargement a été également proposée avec des restrictions puisque celle-ci devra faire l'objet de travaux ultérieurs.

# Chapitre 6

## Premiers résultats

### Sommaire

---

|                                                         |            |
|---------------------------------------------------------|------------|
| <b>6.1 Introduction</b>                                 | <b>83</b>  |
| <b>6.2 Étude des cas simples</b>                        | <b>84</b>  |
| 6.2.1 Simulation des essais simples                     | 84         |
| 6.2.2 Influence de la biaxialité                        | 86         |
| <b>6.3 Comparaison avec des résultats expérimentaux</b> | <b>88</b>  |
| 6.3.1 Essais de Roberts et Benzies (1977)               | 88         |
| 6.3.2 Essais de Mars (2001)                             | 94         |
| 6.3.3 Prédiction du renforcement de la durée de vie     | 106        |
| <b>6.4 Rôle de l'inhomogénéité</b>                      | <b>113</b> |
| 6.4.1 Modélisation de l'inhomogénéité                   | 114        |
| 6.4.2 Mise en équations                                 | 115        |
| 6.4.3 Résultats et discussion                           | 117        |
| <b>6.5 Conclusion</b>                                   | <b>125</b> |

---

### 6.1 Introduction

Au fil du chapitre précédent, nous avons développé une grandeur permettant de prédire la durée de vie en fatigue multiaxiale des matériaux élastomères. Des formulations en élasticité et inélasticité ont été proposées. Notre discussion porte à présent sur l'utilisation de cette grandeur,  $\Sigma^*$ , dans quelques cas simples. Comme il l'a été évoqué précédemment, seuls des cas admettant des solutions analytiques seront étudiés.

Dans un premier temps, nous nous proposons d'étudier l'évolution de  $\Sigma^*$  en fonction de l'élongation imposée,  $\lambda$ , pour les modes de chargement simples, i.e. la traction uniaxiale, la traction équibiaxiale et le cisaillement pur. Pour comparaison, nous présentons également l'évolution de la contrainte nominale,  $\pi$ , et de la densité d'énergie de déformation,  $W$ , tous deux grandeurs prédictives classiques. Dans un deuxième temps, une étude théorique concernant l'évolution des différentes grandeurs prédictives en fonction de la biaxialité pour différents niveaux d'élongation sera présentée. Trois grandeurs prédictives classiques, i.e. la contrainte

de Cauchy maximale,  $\sigma_{\max}$ , la densité d'énergie de déformation,  $W$ , et l'élongation maximale,  $\lambda_{\max}$ , seront comparées avec la notre. Ensuite, afin de vérifier la pertinence de notre théorie pour les cas de chargement multiaxiaux proportionnels et non-proportionnels, une comparaison avec les résultats expérimentaux de [Roberts et Benzies \[1977\]](#) et [Mars \[2001\]](#) sera proposée. Tous ces exemples seront étudiés avec un modèle de comportement élastique. Puis, une étude théorique sera dédiée au cas inélastique. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la prédiction du renforcement de la durée de vie en fatigue des élastomères qui a été mis en évidence pour la première fois par [Cadwell et al. \[1940\]](#) et que nous avons évoqué dans le chapitre 2. Finalement, une étude théorique concernant l'influence de l'inhomogénéité des propriétés mécaniques sur la durée de vie sera esquissée.

## 6.2 Étude des cas simples

### 6.2.1 Simulation des essais simples

Dans cette section, l'évolution de notre grandeur prédictive dans différents cas de chargement simples est examinée. Pour cela, un modèle hyperélastique de Néo-Hookéen est adopté, i.e. :

$$W = C (I_1 - 3) \quad (6.1)$$

avec  $C = 1$  MPa. Le tenseur des contraintes configurationnelles se réduit alors à :

$$\Sigma = (W + p) \mathbf{I} - 2CC \quad (6.2)$$

ici  $p$  est déterminée à partir des équations d'équilibre. Dans la suite, nous nous intéressons au trois chargements simples, i.e. traction uniaxiale, traction équibiaxiale et cisaillement pur. En supposant que le matériau est incompressible, dans les directions principales,  $(\mathbf{e}_i)_{i=1,2,3}$ , le tenseur du gradient de la transformation associé à ces trois modes de chargement s'écrit :

$$\mathbf{F} = \lambda \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda^B \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda^{-(B+1)} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (6.3)$$

avec  $B$  la biaxialité donnée par :

$$B = \begin{cases} -0,5 & \text{pour la traction uniaxiale} \\ 0 & \text{pour le cisaillement pur} \\ 1 & \text{pour la traction équibiaxiale} \end{cases}$$

La densité d'énergie de déformation s'écrit donc :

$$W = C (\lambda^2 + \lambda^{2B} + \lambda^{-2(B+1)} - 3) \quad (6.4)$$

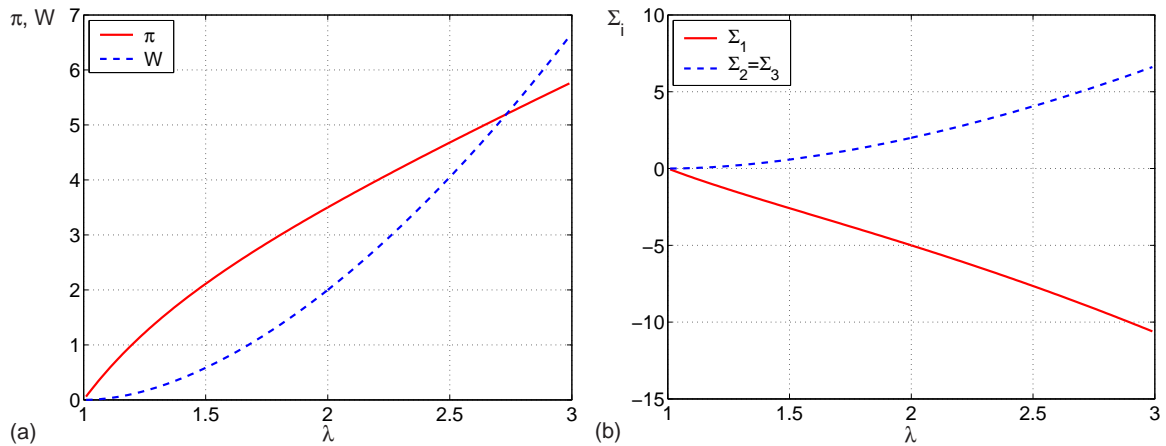
Ensuite, en utilisant l'équation d'équilibre  $\sigma_{33} = 0$  afin de déterminer  $p$  (le tenseur des contraintes étant plan dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ), la contrainte de Piola-Kirchhoff I s'exprime :

$$\boldsymbol{\pi} = 2C (\lambda - \lambda^{-(2B+3)}) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2C (\lambda^B - \lambda^{-(3B+2)}) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (6.5)$$

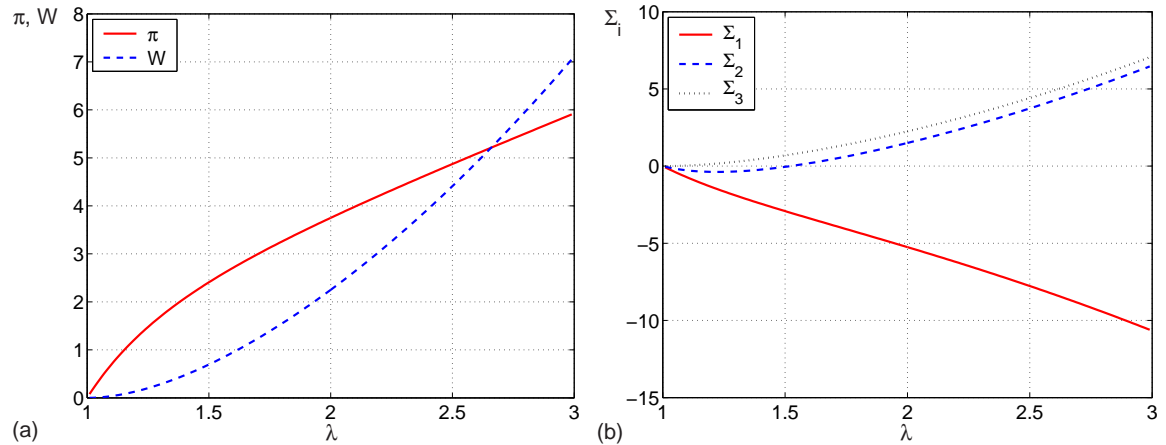
ainsi que la contrainte configurationnelle :

$$\begin{aligned} \Sigma = & C \left( -\lambda^2 + \lambda^{2B} + 3\lambda^{-(2B+1)} - 3 \right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ & + C \left( \lambda^2 + \lambda^{2B} + \lambda^{-(2B+1)} - 2\lambda^{(3B-1)} + 2\lambda^{-(B+3)} - 3 \right) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \\ & + C \left( \lambda^2 + \lambda^{2B} + 3\lambda^{-(2B+1)} - 3 \right) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (6.6)$$

L'évolution de la contrainte de Piola-Kirchhoff I, de la densité d'énergie de déformation et de la contrainte configurationnelle en fonction de l'élongation imposée est présentée sur les figures 6.1, 6.2 et 6.3 pour les cas de traction uniaxiale, de cisaillement pur et de traction équi-biaxiale respectivement. En traction uniaxiale,  $\Sigma_1$  est la seule valeur principale négative



**Fig. 6.1:** Evolution des grandeurs mécaniques en traction uniaxiale.



**Fig. 6.2:** Evolution des grandeurs mécaniques en cisaillement pur.

de la contrainte configurationnelle, la fissure croît dans le plan normal à  $\mathbf{e}_1$ . En cisaillement pur,  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont négatives pour  $\lambda < 1,5$ , puis seule  $\Sigma_1$  est négative pour des niveaux d'élongation plus importants. Dans ce cas, la fissure croît toujours dans le plan normal à  $\mathbf{e}_1$ . Finalement, en traction équi-biaxiale, la fissure peut croître soit dans le plan normal à  $\mathbf{e}_1$  ou à  $\mathbf{e}_2$  puisque  $\Sigma_1 = \Sigma_2 < 0$ . Ces résultats simples sont en accord avec l'intuition qu'on peut avoir.

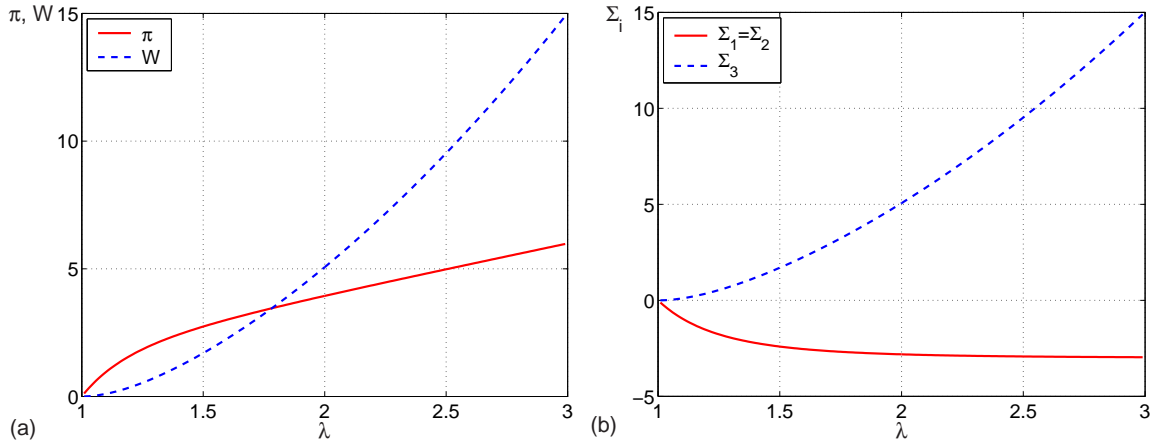


Fig. 6.3: Evolution des grandeurs mécaniques en traction équi-biaxiale.

## 6.2.2 Influence de la biaxialité

Le deuxième exemple que nous allons traiter est l'étude de l'influence de la biaxialité sur la valeur de  $\lambda_{\max}$ ,  $\sigma_{\max}$ ,  $W$  et  $\Sigma^*$ . En effet, comme l'ont observé expérimentalement [Roberts et Benzies \[1977\]](#), la durée de vie des élastomères sous chargement de tractions uniaxiale et équi-biaxiale pour un même niveau d'élongation est très différente, i.e. celle-ci dépend fortement de la biaxialité. Afin de réaliser cette étude, la densité d'énergie de déformation d'Odgen est adoptée :

$$W = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (6.7)$$

et les constantes de matériau utilisées sont obtenues grâce aux résultats expérimentaux de [Treloar \[1944\]](#), telles que proposées par Odgen :

$$\begin{aligned} \{\mu_i\}_{i=1,2,3} &= \{0,63; 0,0012; -0,01\} \text{ MPa} \\ \{\alpha_i\}_{i=1,2,3} &= \{1,3; 5,0; -2,0\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Pour une valeur de  $B$  donnée, le tenseur du gradient de la transformation est donné par l'équation (6.3). Pour  $B = -0,5; 0; 1$ , on retrouve évidemment les résultats précédents. Pour les autres valeurs de  $B \in ]-0,5; 1[$ , le mode de chargement est biaxial. Ainsi, l'élongation maximale est  $\lambda_{\max} = \lambda$ . La contrainte de Cauchy et la densité d'énergie de déformation deviennent respectivement :

$$\sigma_{\max} = \sum_{i=1}^3 \mu_i (\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{\alpha_i(B+1)}) \quad (6.9)$$

et

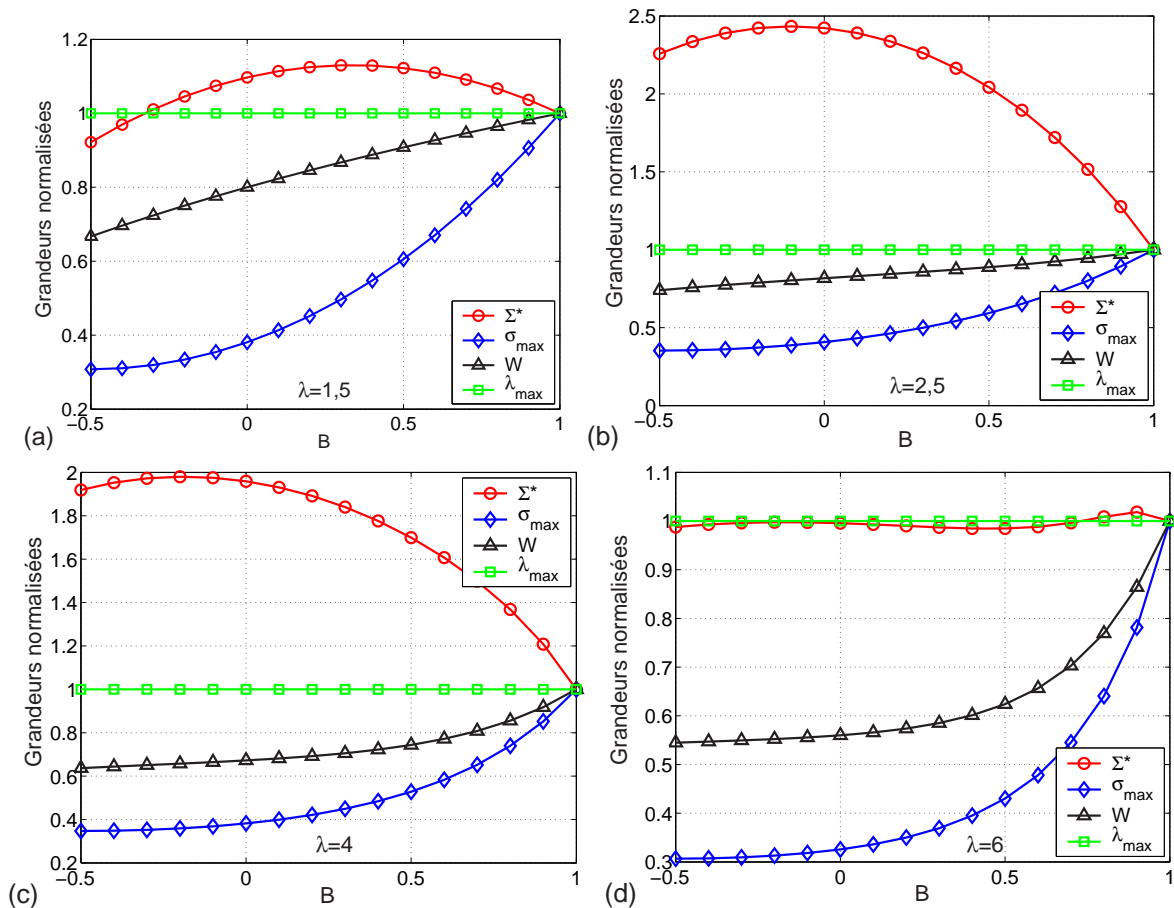
$$W = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda^{\alpha_i} + \lambda^{\alpha_i B} + \lambda^{-\alpha_i(B+1)} - 3) \quad (6.10)$$

Enfin, notre grandeur prédictive,  $\Sigma^*$ , est toujours égale à  $-\Sigma_1$ , et s'exprime :

$$\Sigma^* = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{\alpha_i} [3 - (1 - \alpha_i) \lambda^{\alpha_i} - \lambda^{\alpha_i B} - (1 + \alpha_i) \lambda^{-\alpha_i(B+1)}] \quad (6.11)$$



La figure 6.4 présente l'influence de la biaxialité sur les grandeurs prédictives pour différents niveaux d'élongation, i.e. 1,5 ; 2,5 ; 4 et 6. Sur cette figure,  $\lambda_{\max}$ ,  $\sigma_{\max}$ ,  $W$  et  $\Sigma^*$  sont tracées en fonction de  $B$ . Toute courbe est normalisée par rapport à la valeur de la grandeur prédictive correspondante pour la traction équi-biaxiale, i.e.  $B = 1$ . Dans tous les cas,  $\lambda_{\max}$  n'évolue donc pas. Nous pouvons constater que pour tout niveau d'élongation, toutes les grandeurs



**Fig. 6.4:** L'influence de la biaxialité sur la valeur des grandeurs prédictives pour différents niveaux d'élongation. (a)  $\lambda = 1,5$ ; (b)  $\lambda = 2,5$ ; (c)  $\lambda = 4$  et (d)  $\lambda = 6$ .

n'évoluent pas de manière significative sur la gamme de  $B \in [-0,5; 0]$  sauf pour  $\lambda = 1,5$ . Par conséquent, tout mode de chargement dans cette gamme, e.g. traction uniaxiale, cisaillement pur ou traction/torsion, n'est pas suffisant pour vérifier la pertinence d'une grandeur prédictive vis-à-vis des autres. Nous avons donc besoin d'aller plus loin. Sur la gamme  $B \in [0; 1]$ , mis à part  $\lambda_{\max}$ , toutes les grandeurs évoluent de manière significative.  $\sigma_{\max}$  et  $W$  augmentent avec  $B$  alors que notre grandeur  $\Sigma^*$  montre une tendance différente. En effet, pour des extensions modérées ( $\lambda = 1,5$ ),  $\Sigma^*$  évolue très peu (figure 6.4(a)). Ensuite elle évolue de manière importante pour des déformations plus importantes ( $\lambda = 2,5$  et  $\lambda = 4$ ) comme le montrent les figures 6.4(b)-(c) : la valeur de  $\Sigma^*$  en traction équi-biaxiale est environ deux fois plus grande que celle en traction uniaxiale. Enfin, pour les grandes déformations ( $\lambda = 6$ ), notre grandeur reste inchangée. A la lumière de ces résultats, la comparaison entre traction uniaxiale

et traction équi-biaxiale est donc un moyen nécessaire pour vérifier la pertinence d'une grandeur prédictive. Ceci sera fait dans la section suivante.

## 6.3 Comparaison avec des résultats expérimentaux

### 6.3.1 Essais de Roberts et Benzies (1977)

Afin de démontrer l'efficacité de notre grandeur prédictive (Proposition 1, page 72), les résultats expérimentaux de Roberts et Benzies [1977], présentés dans le chapitre 2, sont considérés. Dans leur étude, les auteurs réalisent des essais de traction uniaxiale et équi-biaxiale cyclique sur des éprouvettes de NR et SBR chargés ou non de noirs de carbone. L'objectif ici est de comparer leurs résultats avec ceux obtenus par notre grandeur  $\Sigma^*$ .

#### 6.3.1.1 Mise en équations

Ici, nous avons utilisé un modèle de Rivlin au second ordre pour la densité d'énergie de déformation afin de déterminer la contrainte. Celui-ci s'écrit :

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 \quad (6.12)$$

où :

$$I_1 = \lambda^2 + \lambda^{2B} + \lambda^{-2(B+1)} \quad \text{et} \quad I_2 = \lambda + \lambda^{2B} + \lambda^{2(B+1)} \quad (6.13)$$

En utilisant les équations (6.3), (6.5) et (6.6), la contrainte de Cauchy et la contrainte configurationnelle s'expriment respectivement :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \left\{ 2(W_I + I_1 W_{II}) [\lambda^2 - \lambda^{-2(B+1)}] + 2W_{II} [\lambda^{-4(B+1)} - \lambda^4] \right\} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ & + \left\{ 2(W_I + I_1 W_{II}) [\lambda^{2B} - \lambda^{-2(B+1)}] + 2W_{II} [\lambda^{-4(B+1)} - \lambda^{4B}] \right\} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} = & \left\{ W - 2(W_I + I_1 W_{II}) [\lambda^2 - \lambda^{-2(B+1)}] - 2W_{II} [\lambda^{-4(B+1)} - \lambda^4] \right\} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ & + \left\{ W - 2(W_I + I_1 W_{II}) [\lambda^{2B} - \lambda^{-2(B+1)}] - 2W_{II} [\lambda^{-4(B+1)} - \lambda^{4B}] \right\} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \\ & + W \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (6.15)$$

où :

$$W_I = \frac{\partial W}{\partial I_1} = C_{10} + 2C_{20} (I_1 - 3) \quad \text{et} \quad W_{II} = \frac{\partial W}{\partial I_2} = C_{01} \quad (6.16)$$

Finalement, l'expression de chaque grandeur prédictive pour le cas de traction uniaxiale ( $B = -0,5$ ) et équi-biaxiale ( $B = 1$ ) est donnée par :

$$\lambda_{\max} = \lambda \quad \sigma_{\max} = \sigma_{11} \quad W = W_{\text{mesurée}} \quad \Sigma^* = |\Sigma_{11}| \quad (6.17)$$

et les constantes de matériau utilisées sont présentées dans le tableau 6.1.

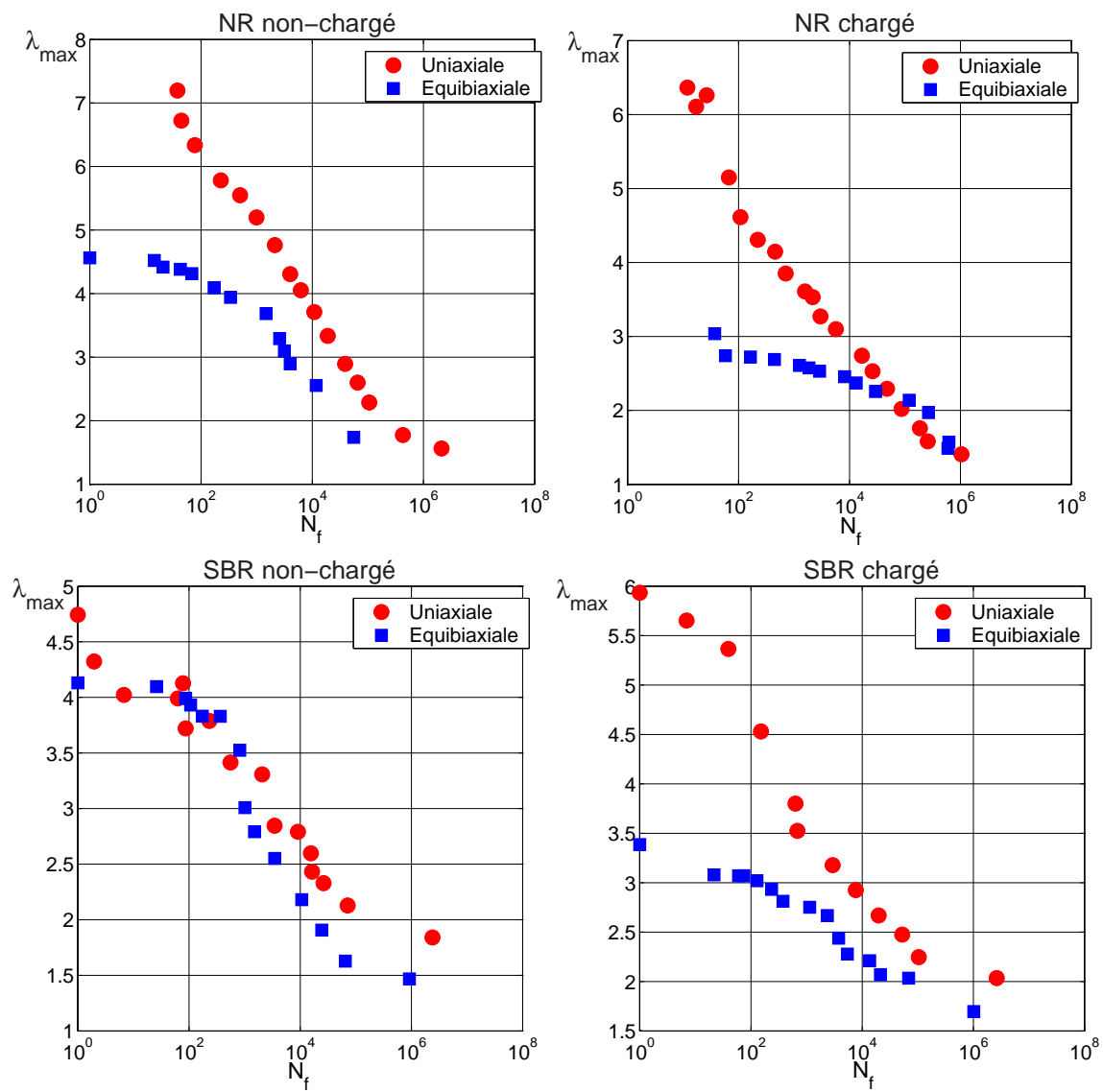
| Matériaux      | $C_{10}$ (MPa) | $C_{01}$ (MPa) | $C_{20}$ (MPa) |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| NR chargé      | 0,89           | 0,46           | 0              |
| NR non-chargé  | 0,44           | 0,056          | 0              |
| SBR chargé     | 0              | 1,13           | 0,04           |
| SBR non-chargé | 0,27           | 0,1            | 0,011          |

**Tab. 6.1:** Valeurs des paramètres pour les matériaux étudiés.

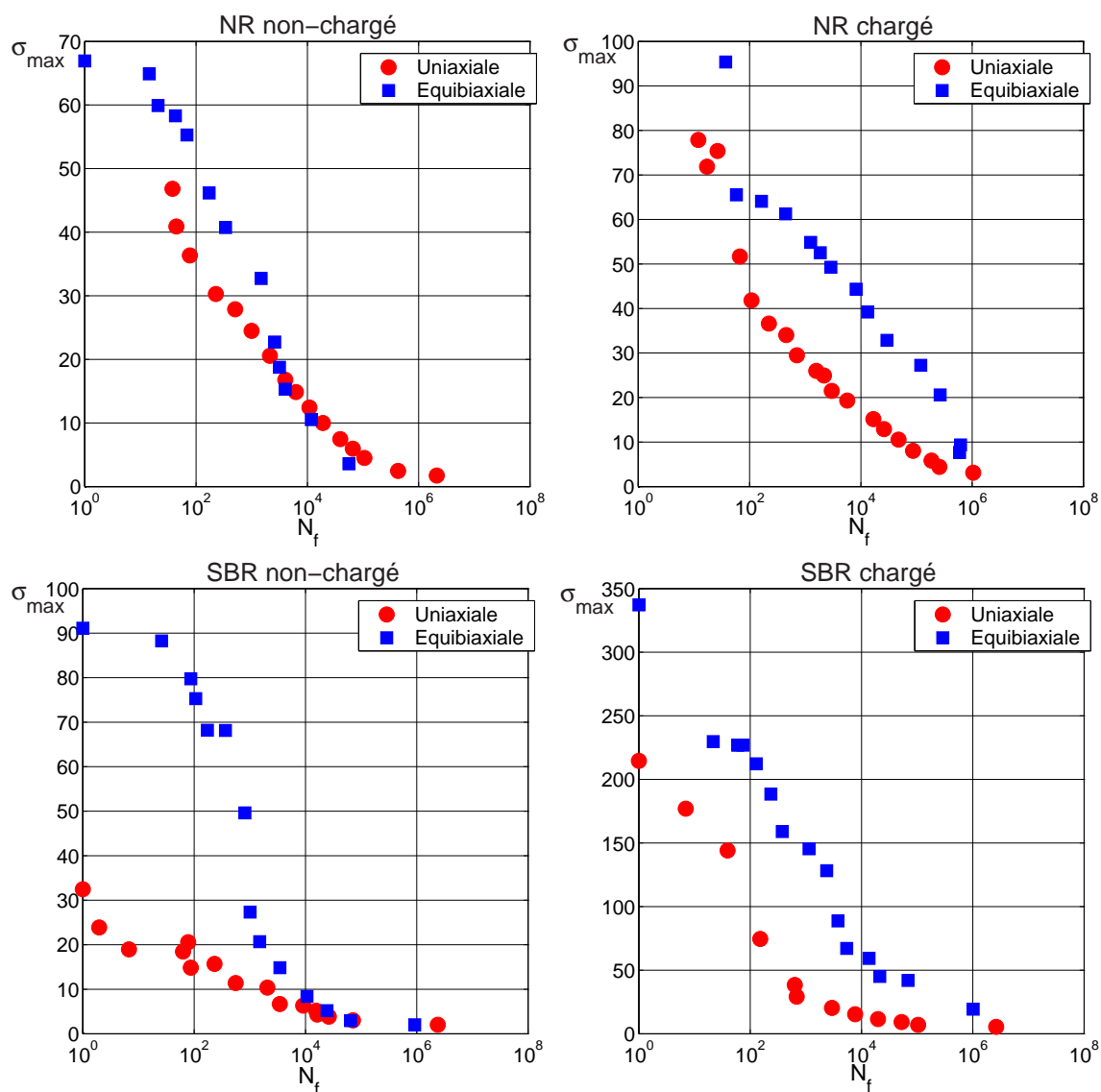
### 6.3.1.2 Résultats et discussion

Les courbes de durée de vie en fonction de  $\lambda_{\max}$ ,  $\sigma_{\max}$ ,  $W$  et  $\Sigma^*$  pour les chargements de traction uniaxiale et équi-biaxiale sont présentées respectivement sur les figures 6.5 à 6.8. Sur chaque figure, quatre courbes correspondant aux quatre matériaux (NR non-chargé, NR chargé, SBR non-chargé et SBR chargé) sont proposées.

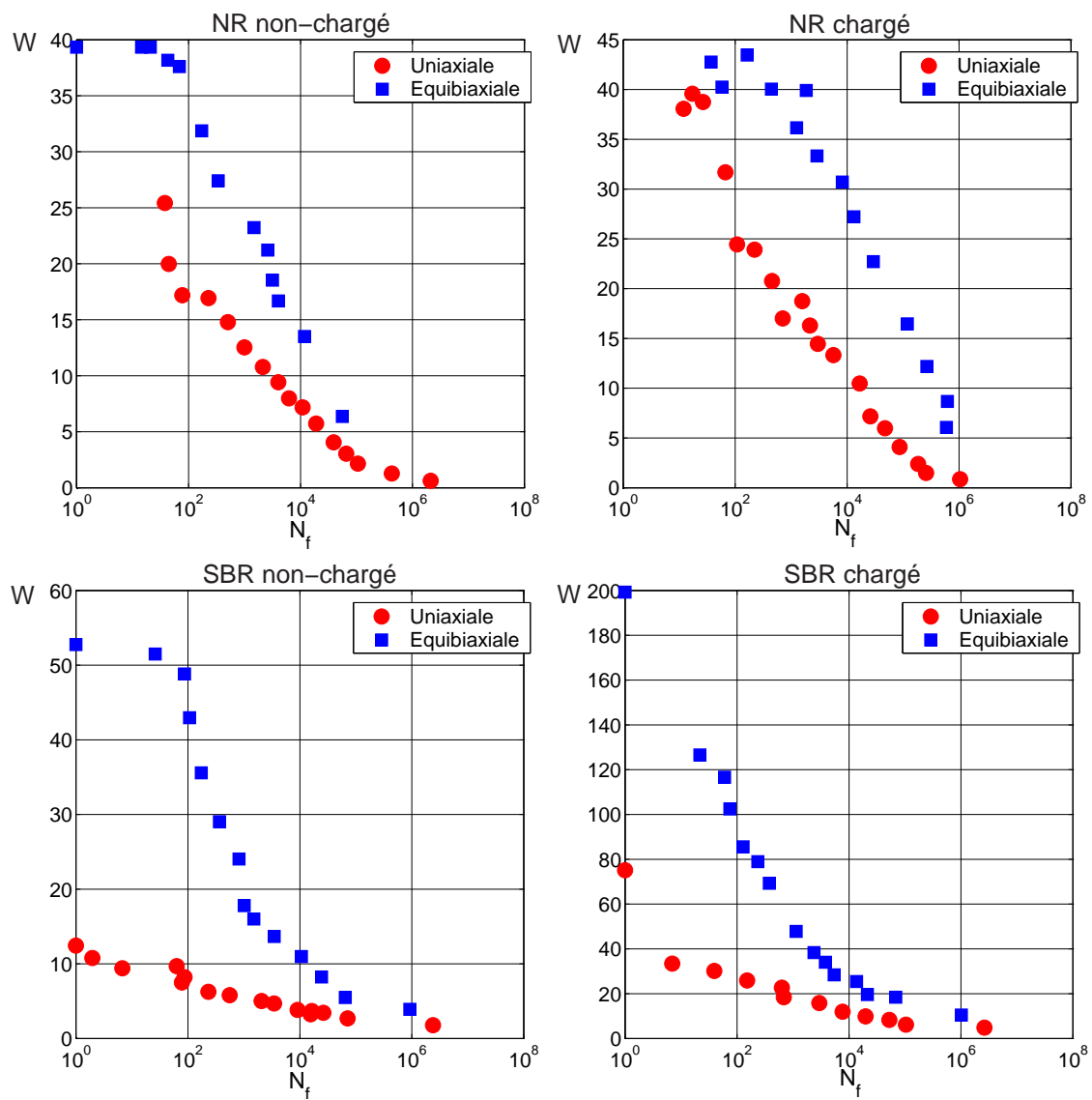
En général,  $\lambda_{\max}$ ,  $\sigma_{\max}$  et  $W$  fournissent des résultats relativement satisfaisants pour les durées de vie importantes. Excepté pour le SBR non-chargé,  $\lambda_{\max}$  est mal adapté pour prédire les courtes durées de vie puisque les courbes de traction uniaxiale et équi-biaxiale s'éloignent pour les durées de vie moins importantes (figure 6.5).  $\sigma_{\max}$  semble bien adaptée dans le cas du NR, plus particulièrement pour le NR non-chargé où elle fournit des résultats parfaitement satisfaisants comme le montre la figure 6.6(a) et (b). Comme pour  $\sigma_{\max}$ ,  $W$  semble mieux adapté au cas du NR (figure 6.7). Néanmoins, les résultats obtenus avec cette grandeur ne sont pas meilleurs que ceux obtenus avec  $\sigma_{\max}$ . Quant à  $\Sigma^*$ , à part pour le SBR non-chargé, les résultats sont satisfaisants pour toute la gamme de durée de vie (figure 6.8). Par ailleurs, pour le NR non-chargé, les deux courbes de traction uniaxiale et équi-biaxiale sont parfaitement superposées. Toutefois, la pertinence de notre grandeur semble limitée dans le cas du SBR non-chargé, plus particulièrement pour les courtes durées de vie.



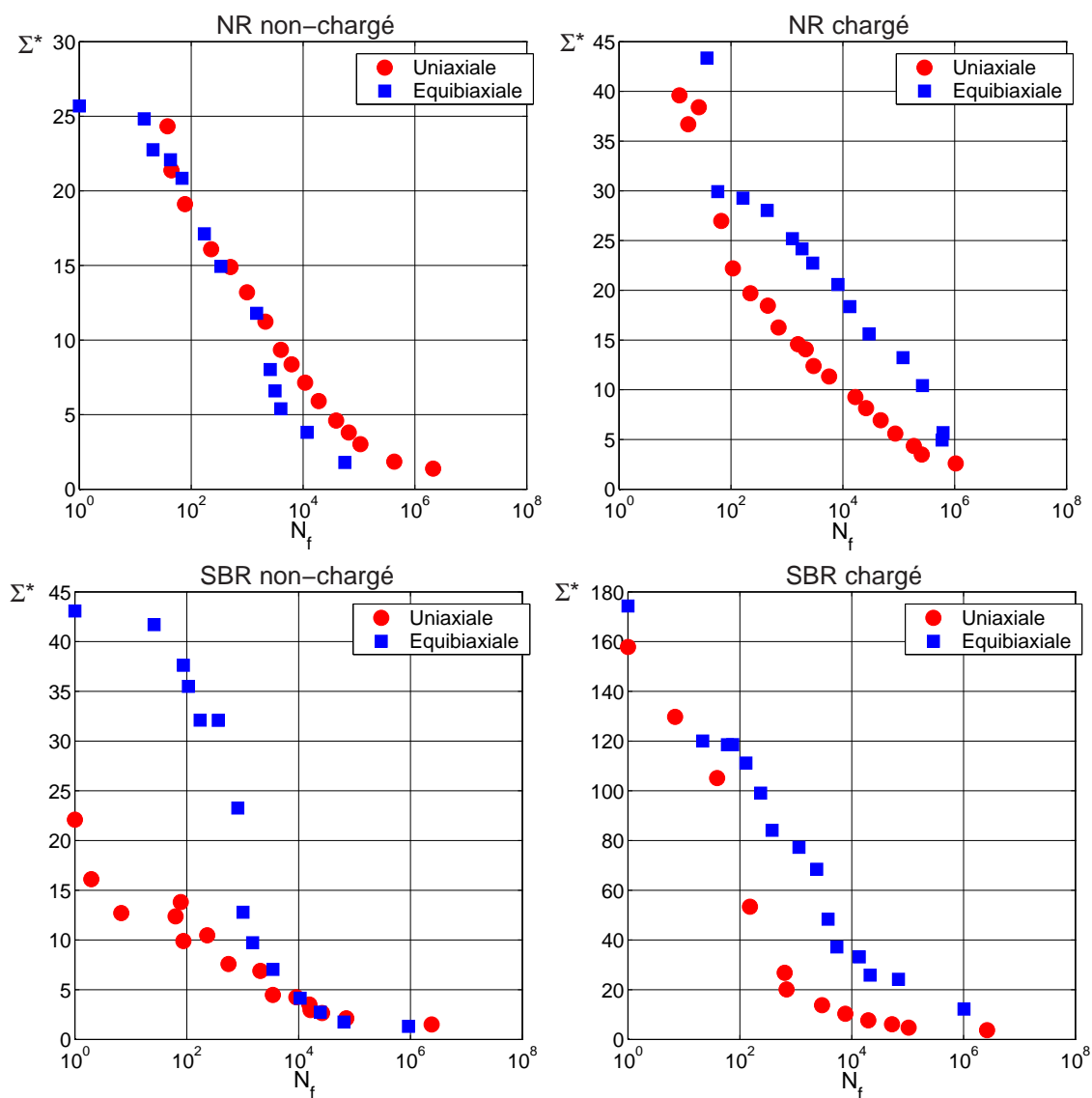
**Fig. 6.5:** Comparaison entre les résultats des tractions uniaxiale et équibiaxiale en utilisant l'élongation principale maximale.



**Fig. 6.6:** Comparaison entre les résultats des tractions uniaxiale et équibiaxiale en utilisant la contrainte principale maximale.



**Fig. 6.7:** Comparaison entre les résultats des tractions uniaxiale et équibiaxiale en utilisant la densité d'énergie de déformation.



**Fig. 6.8:** Comparaison entre les résultats des tractions uniaxiale et équibiaxiale en utilisant notre grandeur prédictive.

### 6.3.2 Essais de Mars (2001)

Cette section a pour objectif de présenter un exemple d'utilisation de la méthode de cumul en élasticité proposée dans le chapitre précédent (Proposition 3(a), page 79). Pour cela, les essais expérimentaux de Mars [2001] sont considérés. Dans son étude, l'auteur introduit une nouvelle géométrie d'éprouvette, formée par un anneau d'élastomère adhérisé à deux inserts métalliques (voir figure 2.7, page 34). Des essais de traction uniaxiale répétée en déplacement imposé sont tout d'abord réalisés avec une déformation moyenne variant de 25% à 200% puis des essais de torsion répétée et alternée à angle imposé sont mis en œuvre. Les essais sont réalisés à des fréquences variant de 0.5 Hz à 6 Hz selon le niveau de déformation de manière à éviter l'auto-échauffement. Ensuite, Mars combine des sollicitations de traction uniaxiale et de torsion, en phase (proportionnelle) et hors-phase (non-proportionnelle). L'intérêt de chargements multiaxiaux hors-phase est de se placer dans un cas de figure où l'endommagement maximum dépend de l'histoire du chargement et non plus de son maximum lors du cycle. Différents trajets de chargement réalisés par Mars sont présentés sur la figure 2.8 (page 35). Ici, nous nous intéressons uniquement aux trajets de chargement de A jusqu'à L.

Afin de calculer la valeur de notre grandeur prédictive pour chaque trajet de chargement, le matériau sera modélisé par un modèle de Néo-Hookéen avec  $C = 1,5$  MPa. Ce modèle est celui adopté par Mars. La déformation imposée est de la forme :

$$\lambda(t) = \lambda_m + \lambda_a \sin(2\pi ft) \quad \tau(t) = \tau_m + \tau_a \sin(2\pi ft + \phi) \quad (6.18)$$

où  $f$  est la fréquence de sollicitation,  $\lambda$  et  $\tau$  sont l'élongation et l'angle de torsion par unité de longueur. Les indices  $m$  et  $a$  correspondent à la valeur moyenne et à l'amplitude. Le chargement est non-proportionnel lorsque  $\phi \neq 0$ . On définit alors les rapports de chargement  $R_x$  comme :

$$R_\varepsilon = \frac{\lambda_{\min} - 1}{\lambda_{\max} - 1} \quad \text{et} \quad R_\tau = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \quad (6.19)$$

Finalement, nous supposons que l'éprouvette est un cylindre de rayon externe  $R_o = 43,18$  mm et de rayon interne  $R_i = 38,10$  mm. La valeur de notre grandeur retenue est celle qui correspond à  $R_o$  puisqu'elle atteint sa valeur maximale à la surface de l'éprouvette. La fissure s'initie donc à cet endroit pour tout chargement comme l'a observé expérimentalement l'auteur.

#### 6.3.2.1 Mise en équations

Ici, on rappelle brièvement la solution analytique d'un cylindre hyperélastique en traction-torsion telle que proposée par Green et Adkins [1960]. Considérons à présent un tube cylindrique de section uniforme et de longueur  $L$ .  $(R, \Theta, Z)$  et  $(r, \theta, z)$  sont les coordonnées spatiales d'un point dans les configurations initiale et déformée respectivement.  $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_Z)$  et  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  représentent les vecteurs unitaires associés aux configurations initiale et déformée. Lorsqu'un chargement de traction-torsion est appliqué, le point  $P_0$  du cylindre dans la configuration initiale est déplacé en  $P$  dans la configuration déformée (voir figure 6.9). La position spatiale de  $P$  est donnée par :

$$r = \frac{R}{\sqrt{\lambda}} \quad \theta = \Theta + \lambda\tau Z \quad z = \lambda Z \quad (6.20)$$



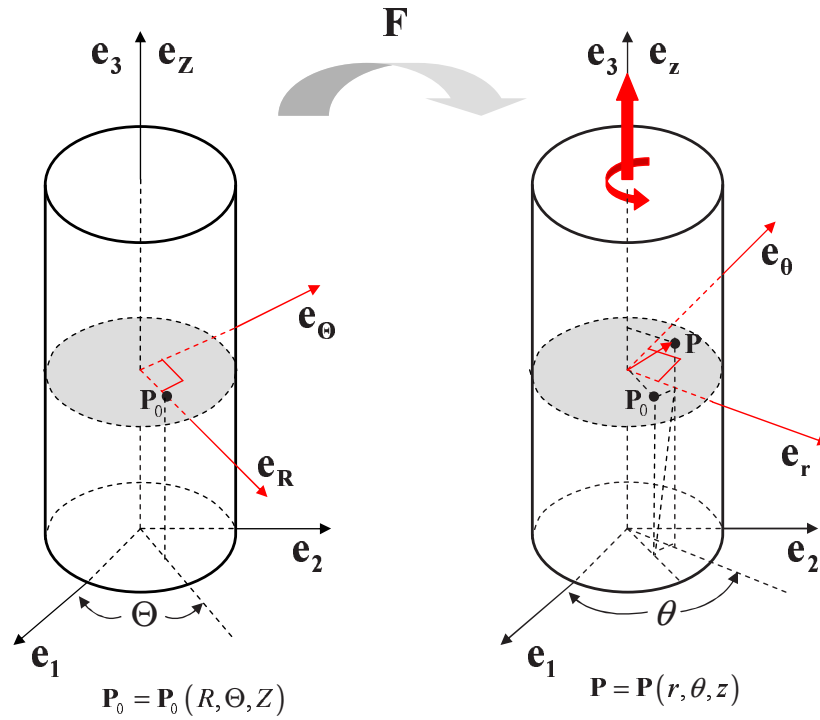


Fig. 6.9: Traction torsion d'un cylindre hyperélastique.

où  $\lambda$  est l'extension et  $\tau$  est l'angle de torsion par unité de longueur. Le tenseur gradient de la transformation s'écrit :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\Theta) + R\sqrt{\lambda}\tau \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_Z + \lambda \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z \quad (6.21)$$

et les tenseurs des dilatations de Cauchy-Green à gauche  $\mathbf{B}$  et à droite  $\mathbf{C}$  s'expriment :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \left( \frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \tau^2 r^2 \right) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \lambda^2 \tau r (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta) + \lambda^2 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (6.22)$$

et :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\lambda} (\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\Theta) + \tau R (\mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_\Theta) + (\lambda^2 + \lambda \tau^2 R^2) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \quad (6.23)$$

Le premier invariant de  $\mathbf{B}$  est donc :

$$I_1 = \lambda^2 + \lambda \tau^2 R^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (6.24)$$

Dans le cas où l'énergie de déformation ne dépend que de  $I_1$ , la contrainte de Cauchy est donnée simplement par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \left( -p + 2W_I \frac{1}{\lambda} \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \left( -p + 2W_I \left( \frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \tau^2 r^2 \right) \right) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \\ & + 2W_I \lambda^2 \tau r (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta) + \left( -p + 2W_I \lambda^2 \right) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (6.25)$$

avec  $W_I = \partial W / \partial I_1$ . Pour un cylindre plein sans traction latérale,  $p$  s'écrit en fonction de la position du point  $P_0$  comme suit :

$$p(R) = \frac{2}{\lambda} W_I(R) + 2\lambda\tau^2 \int_R^{R_o} s W_I(s) ds \quad (6.26)$$

finalement, l'expression de chaque composante de  $\sigma$  est :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(R) &= -2\lambda\tau^2 \int_R^{R_o} s W_I(s) ds \\ \sigma_{\theta\theta}(R) &= 2\lambda\tau^2 \left( R^2 W_I(R) - \int_R^{R_o} s W_I(s) ds \right) \\ \sigma_{\theta z}(R) &= \sigma_{z\theta}(R) = 2\lambda^{3/2} \tau R W_I(R) \\ \sigma_{zz}(R) &= 2W_I(R) \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) - 2\lambda\tau^2 \int_R^{R_o} s W_I(s) ds \end{aligned} \quad (6.27)$$

avec  $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = 0$ . Pour un matériau hyperélastique Neo-Hookéen,  $W_I = C$ . La contrainte de Cauchy devient :

$$\begin{aligned} \sigma &= -C\lambda\tau^2 (R_o^2 - R^2) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + C\lambda\tau^2 (3R^2 - R_o^2) \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \\ &+ 2C\lambda^{3/2} \tau R (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta) + \left( 2C \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) - C\lambda\tau^2 (R_o^2 - R^2) \right) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (6.28)$$

La contrainte configurationnelle instantanée est donnée par :

$$\begin{aligned} \Sigma &= C \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} + \lambda\tau^2 R_o^2 - 3 \right) (\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\Theta) - 2CR\tau (\mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_\Theta) \\ &+ C \left( -\lambda^2 + \frac{4}{\lambda} + \lambda\tau^2 (R_o^2 - 2R^2) - 3 \right) \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_Z \end{aligned} \quad (6.29)$$

Finalement, afin de cumuler sur un cycle la contrainte configurationnelle, écrivons :

$$d\Sigma = \left( \frac{d\Sigma}{d\lambda} \dot{\lambda} + \frac{d\Sigma}{d\tau} \dot{\tau} \right) dt \quad (6.30)$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma}{d\lambda} &= C \left( 2\lambda - \frac{2}{\lambda^2} + \tau^2 R_o^2 \right) (\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\Theta) \\ &+ C \left( -2\lambda - \frac{4}{\lambda^2} + \tau^2 (R_o^2 - 2R^2) \right) \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_Z \end{aligned} \quad (6.31)$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma}{d\tau} &= 2C\lambda\tau R_o^2 (\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\Theta) - 2CR (\mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_\Theta) \\ &+ 2C\lambda\tau (R_o^2 - 2R^2) \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_Z \end{aligned} \quad (6.32)$$

A chaque incrément du chargement ( $d\lambda = \dot{\lambda} dt$  et  $d\tau = \dot{\tau} dt$ ), l'incrément de la contrainte configurationnelle  $d\Sigma$  est calculé. La partie qui contribue à la croissance de micro-défauts est donnée par (l'équation (5.23)) :

$$d\Sigma^d = \min(d\Sigma_i, 0) \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad (6.33)$$

où  $(d\Sigma_i)_{i=1,2,3}$  et  $(\mathbf{v}_i)_{i=1,2,3}$  sont les valeurs propres et leurs vecteurs propres associés. En exprimant  $d\Sigma^d$  dans la coordonnée spatiale de la configuration initiale  $(R, \Theta, Z)$ , on a :

$$d\Sigma^d = (d\Sigma_{ij}^d \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)_{i,j=R,\Theta,Z} \quad (6.34)$$

La contrainte configurationnelle cumulée lors d'un cycle est :

$$\Sigma^d = \int_{\text{cycle}} d\Sigma^d \quad (6.35)$$

et la valeur de notre grandeur prédictive  $\Sigma^*$  est simplement donnée par la plus petite valeur propre de  $\Sigma^d$  :

$$\Sigma^* = \left| \min \left[ (\Sigma_i^d)_{i=1,2,3}, 0 \right] \right| \quad (6.36)$$

ainsi que les micro-défauts tendent à croître et à former une fissure macroscopique dans le plan de normal  $\bar{\mathbf{N}}$ , le vecteur propre associé à  $-\Sigma^*$ .

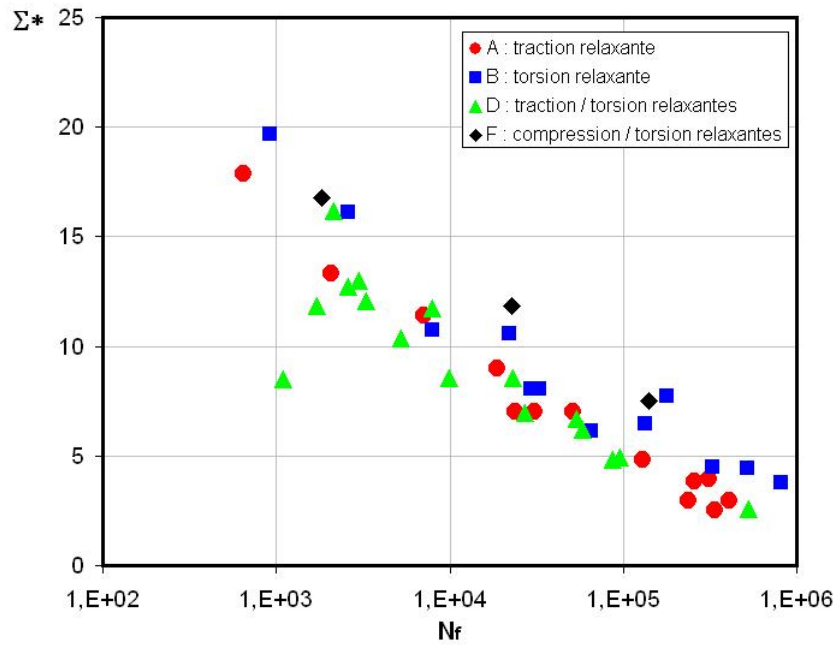
### 6.3.2.2 Résultats et discussion

Dans la suite nous présentons les résultats obtenus en utilisant notre grandeur  $\Sigma^*$  ainsi que l'élongation principale maximale  $\lambda_{\max}$  et la densité d'énergie de fissuration de Mars  $W_c$ . Dans un premiers temps, les différents états de déformation multiaxiale tels que  $R_\varepsilon = R_\tau = R = 0$  sont présentés (trajets A, B, D et F de la figure 2.8, page 35). Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à la pertinence des grandeurs prédictives lors du cumul de l'endommagement subi par le matériau. Ceci est effectué grâce aux trajets de chargement B, C, D et E qui correspondent à  $R = 0$  et  $R = -1$ . Ensuite la capacité à prendre en compte les chargements non-proportionnels est étudié grâce aux trajets D, G, H, I, F et L. Finalement, la prédiction de l'angle de fissure est également présentée pour tous les trajets de chargement.

Les figures 6.10, 6.11 et 6.12 présentent les résultats obtenus respectivement avec  $\Sigma^*$ ,  $\lambda_{\max}$  et  $W_c$  pour différents modes de chargement multiaxial relaxant ( $R = 0$ ). En général les trois grandeurs donnent des résultats satisfaisants. Sur les figures 6.13, 6.14 et 6.15, nous pouvons observer la prédiction de la durée de vie pour des chargements multiaxiaux relaxant ( $R = 0$ ) et alterné ( $R = -1$ ). Notre grandeur semble pertinente pour toute la gamme de la durée de vie qui n'est pas tout à fait le cas pour  $\lambda_{\max}$  et  $W_c$ . En effet, comme le montre les figures 6.14 et 6.15, dans la gamme des courtes durées de vie, les deux grandeurs semblent moins adaptées puisque les résultats ne sont plus superposés. L'efficacité des trois grandeurs dans la prise en compte de chargements non-proportionnels est présentée sur les figures 6.16, 6.17 et 6.18. Les résultats sont qualitativement bien superposés pour toute la gamme de durée de vie.

En ce qui concerne la prédiction d'angle de fissure, les résultats sont présentés sur les figures 6.21 à 6.24. Ici seuls les résultats obtenus avec  $\Sigma^*$  et  $W_c$  sont proposés. En général, les prédictions fournies par les deux grandeurs sont qualitativement bons. En torsion alternée,

notre grandeur semble plus efficace que  $W_c$  (voir les figures 6.21 et 6.22). En revanche, dans le cas de compression/torsion en phase,  $W_c$  donne une meilleure prédiction d'angle de fissure comme le montrent les figures 6.23 et 6.24.



**Fig. 6.10:** Résultats obtenus avec  $\Sigma^*$  pour différents modes de chargement multiaxiaux relaxants ( $R = 0$ ).

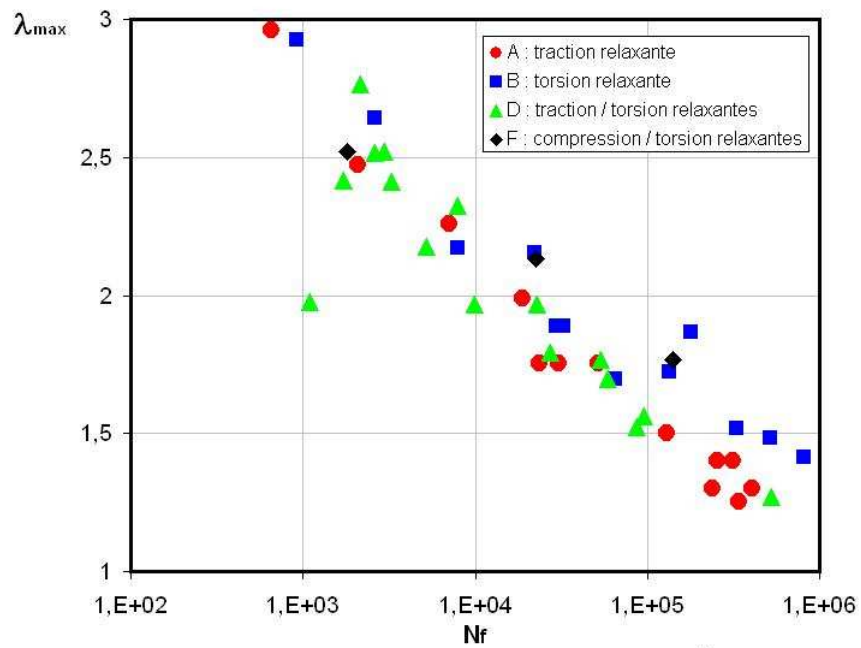


Fig. 6.11: Résultats obtenus avec  $\lambda_{\max}$  pour différents modes de chargement multiaxiaux relaxants ( $R = 0$ ).

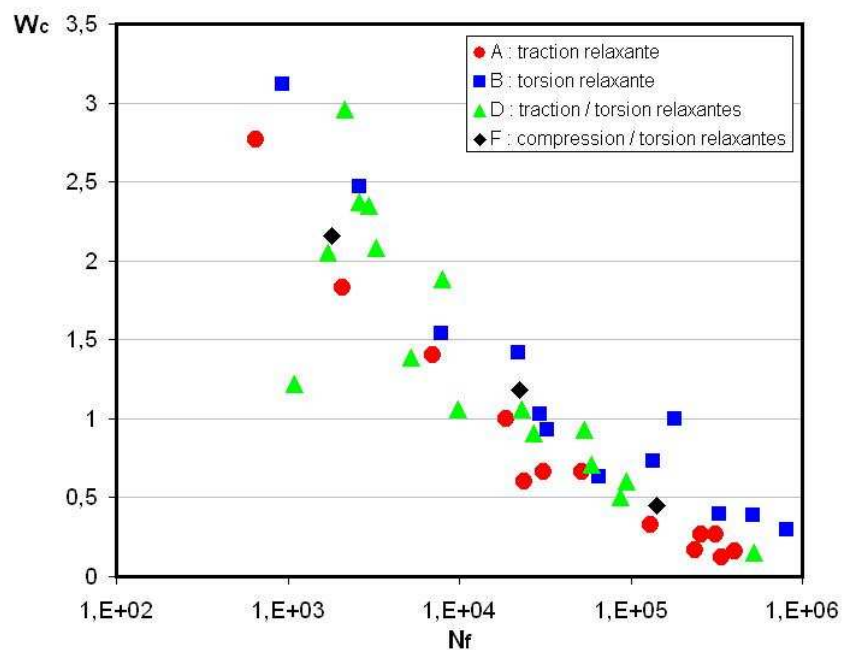


Fig. 6.12: Résultats obtenus avec  $W_c$  pour différents modes de chargement multiaxiaux relaxants ( $R = 0$ ).

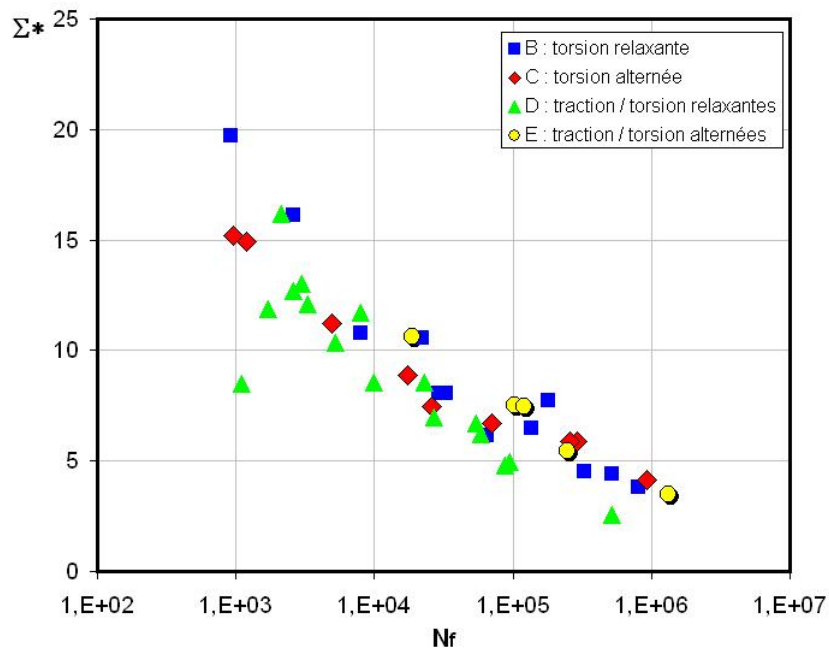


Fig. 6.13: Résultats obtenus avec  $\Sigma^*$  pour des chargements multiaxiaux relaxants ( $R = 0$ ) et alterné ( $R = -1$ ).

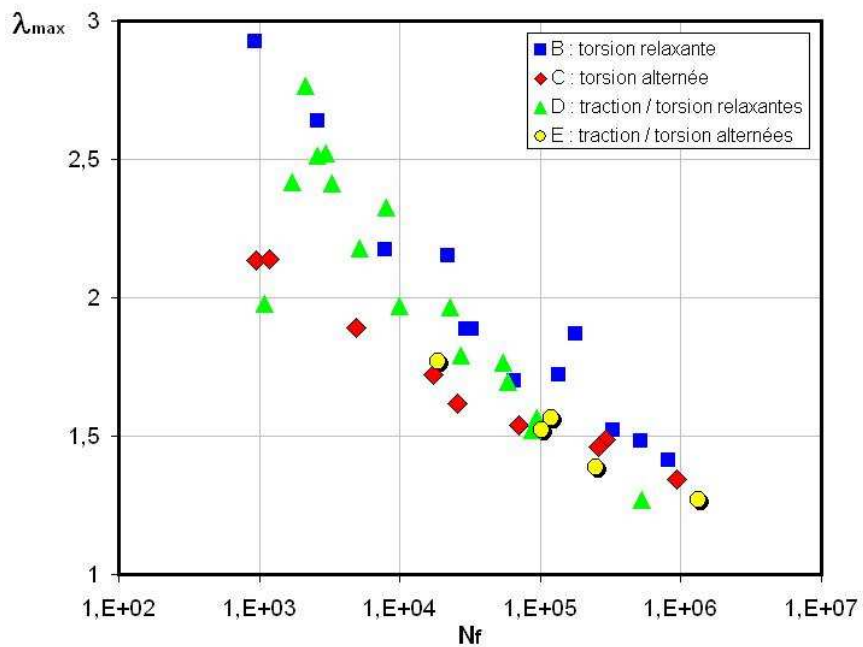
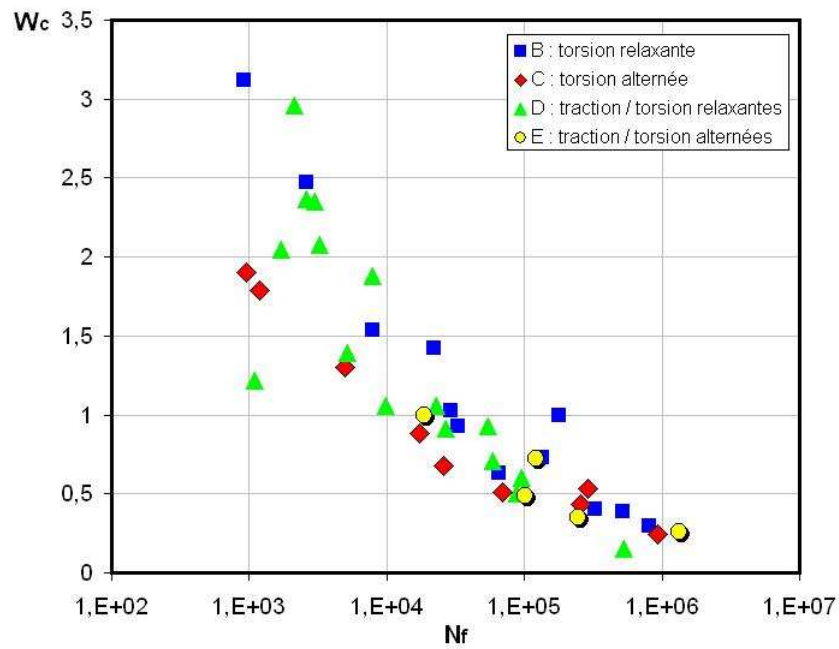
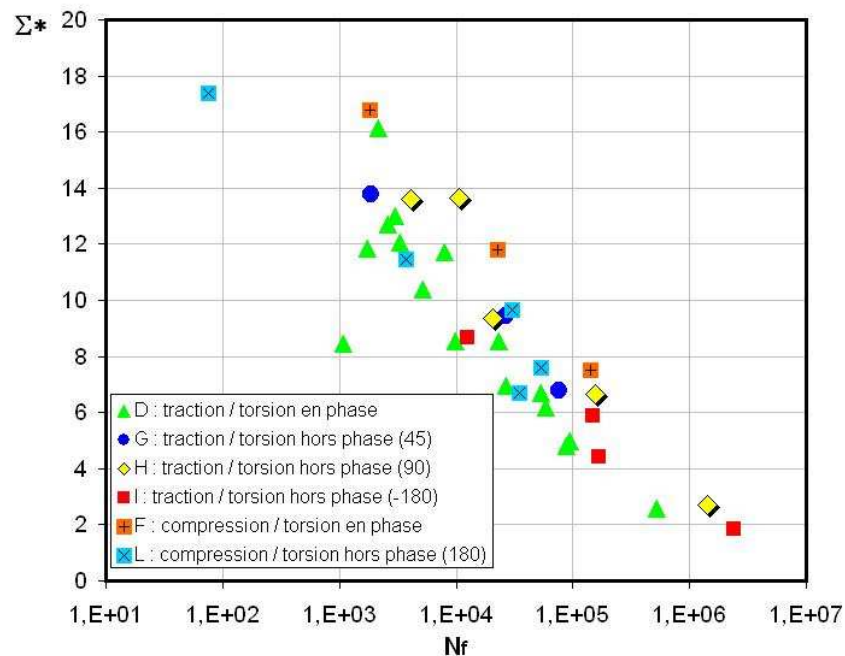


Fig. 6.14: Résultats obtenus par  $\lambda_{\max}$  avec des chargements multiaxiaux relaxants ( $R = 0$ ) et alterné ( $R = -1$ ).



**Fig. 6.15:** Résultats obtenus avec  $W_c$  pour des chargements multiaxiaux relaxants ( $R = 0$ ) et alterné ( $R = -1$ ).



**Fig. 6.16:** Résultats obtenus avec  $\Sigma^*$  pour des chargements multiaxiaux proportionnels et non-proportionnels.

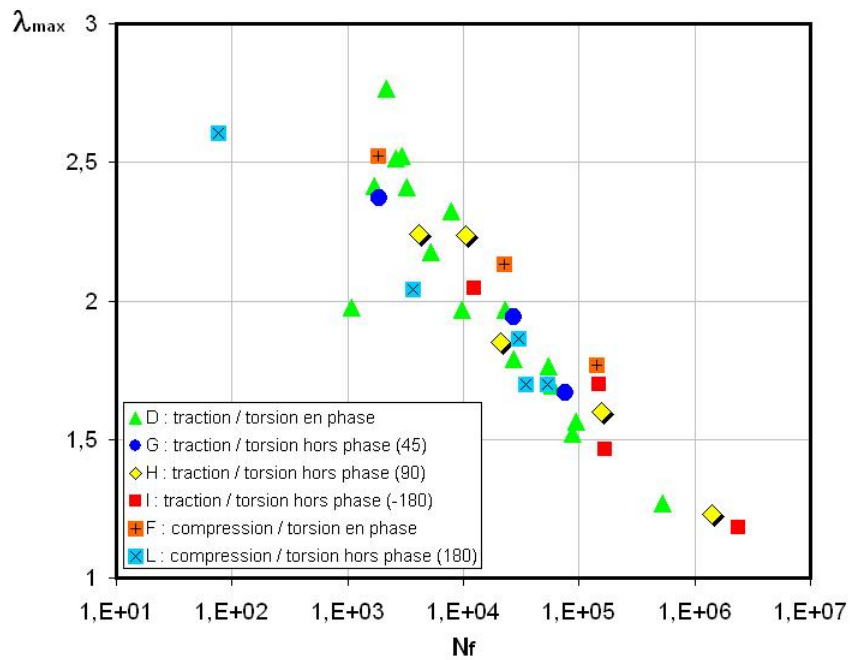


Fig. 6.17: Résultats obtenus avec  $\lambda_{\max}$  pour des chargements multiaxiaux proportionnels et non-proportionnels.

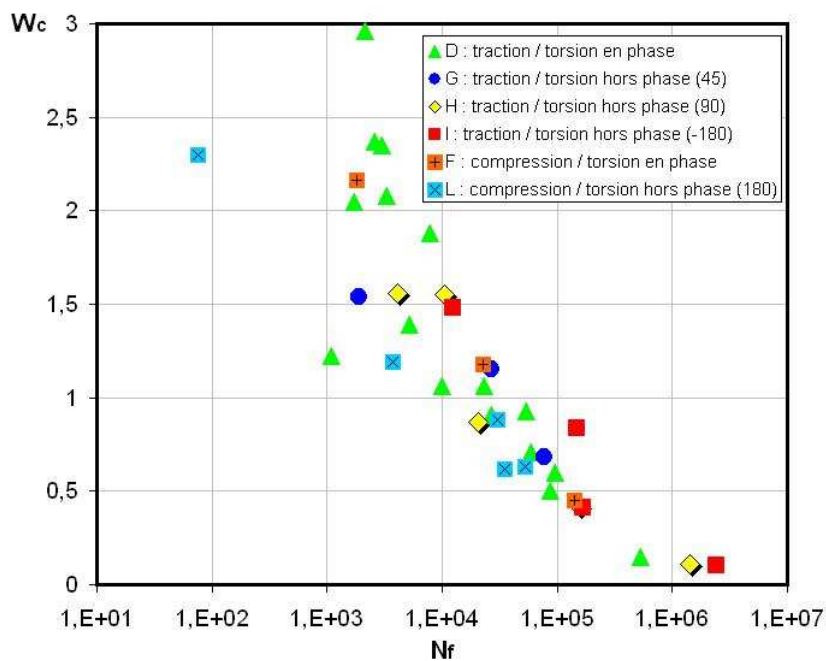
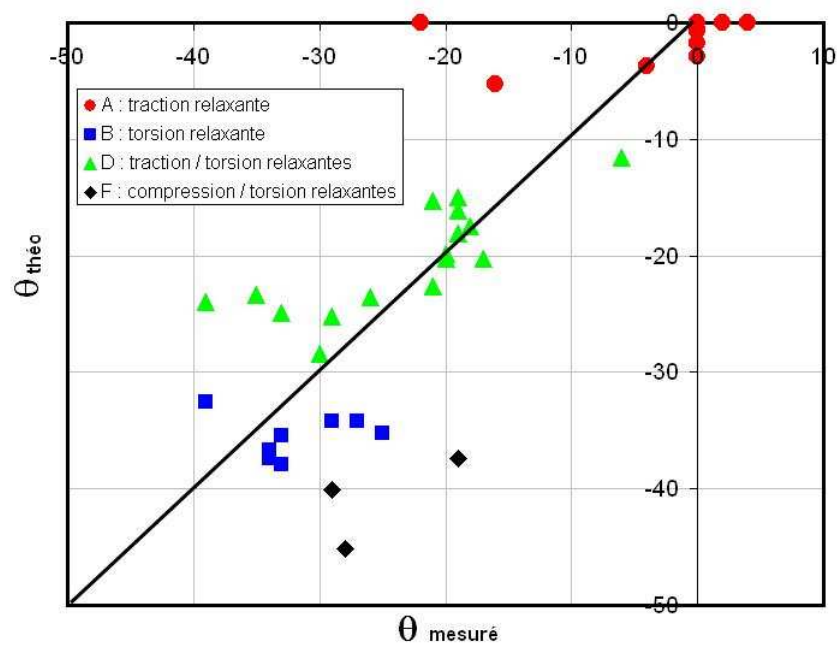
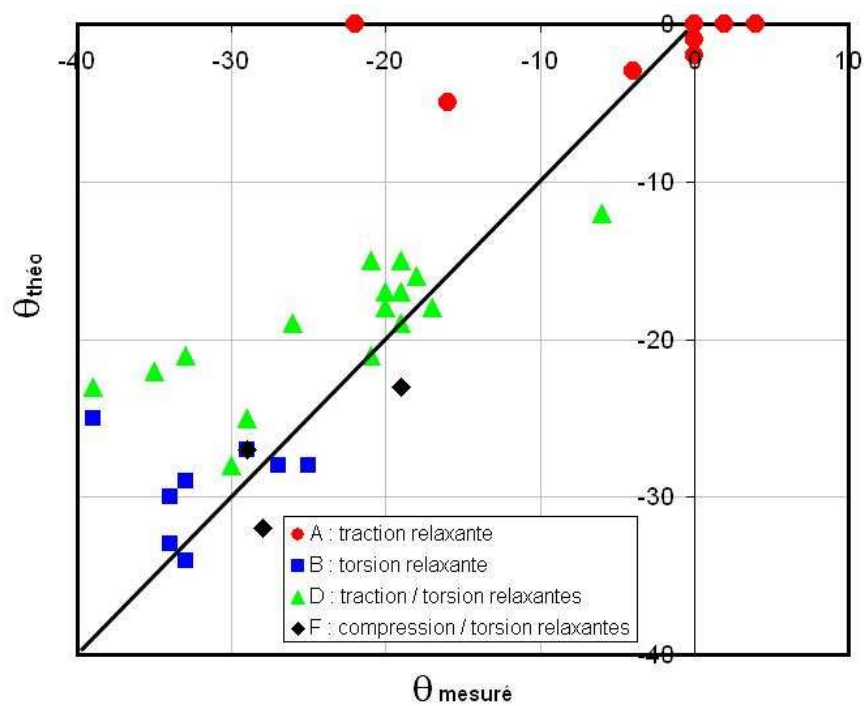


Fig. 6.18: Résultats obtenus avec  $W_c$  pour des chargements multiaxiaux proportionnels et non-proportionnels.

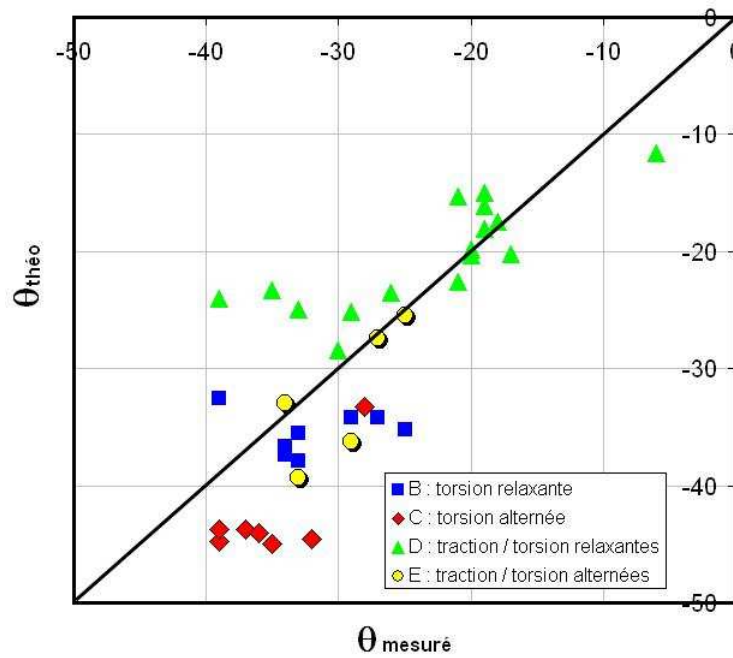




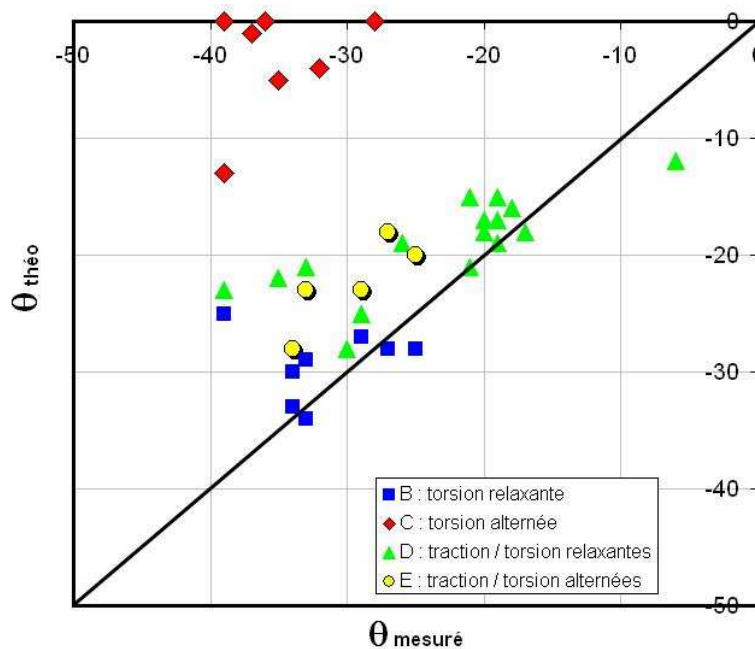
**Fig. 6.19:** Prédiction d'angle de fissure avec  $\Sigma^*$  pour différents modes de chargement multiaxiaux relaxants ( $R = 0$ ).



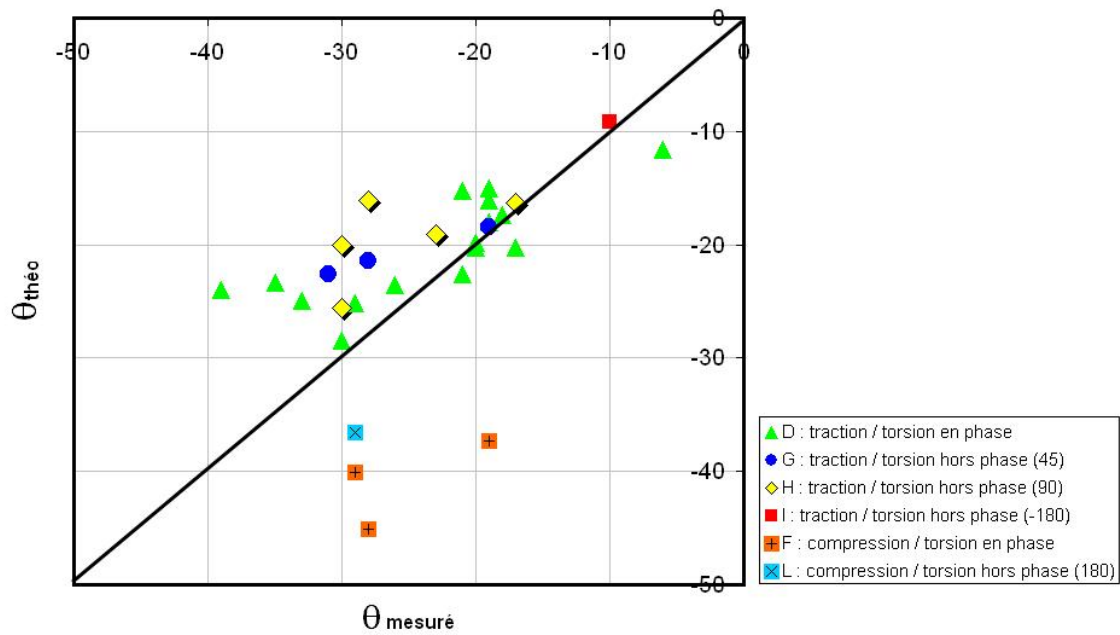
**Fig. 6.20:** Prédiction d'angle de fissure avec  $W_c$  pour différents modes de chargement multiaxiaux relaxants ( $R = 0$ ).



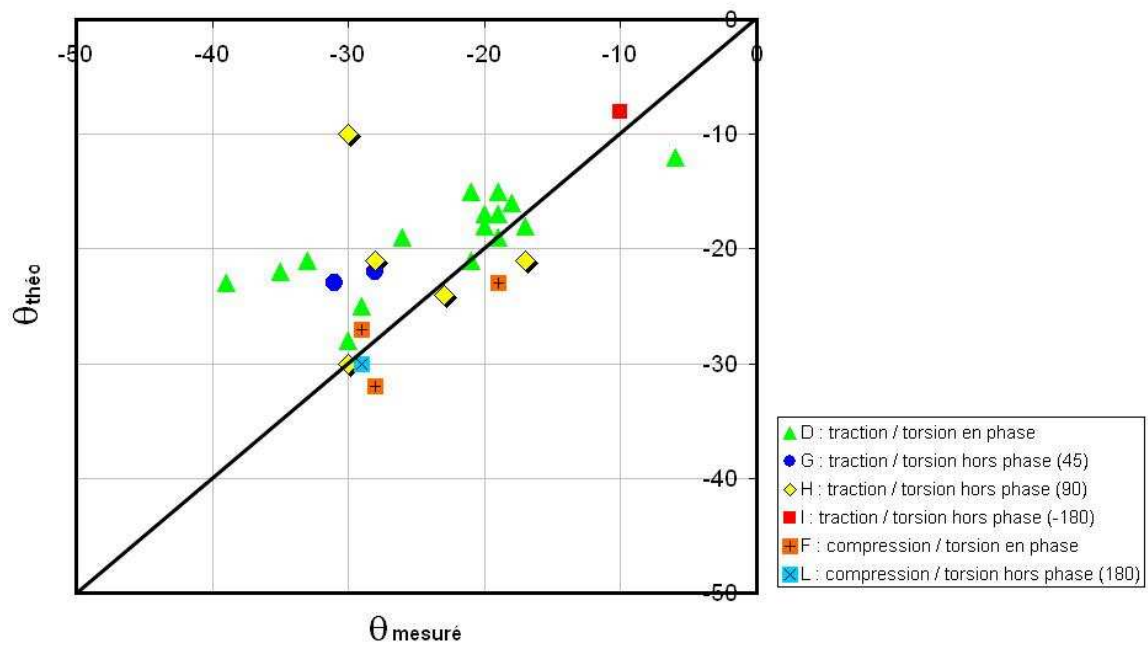
**Fig. 6.21:** Prédiction d'angle de fissure avec  $\Sigma^*$  pour des chargements multiaxiaux relaxants ( $R = 0$ ) et alternés ( $R = -1$ ).



**Fig. 6.22:** Prédiction d'angle de fissure avec  $W_c$  pour des chargements multiaxiaux relaxants ( $R = 0$ ) et alternés ( $R = -1$ ).



**Fig. 6.23:** Prédiction d'angle de fissure avec  $\Sigma^*$  pour des chargements multiaxiaux proportionnels et non-proportionnels.



**Fig. 6.24:** Prédiction d'angle de fissure avec  $W_c$  pour des chargements multiaxiaux proportionnels et non-proportionnels.

### 6.3.3 Prédiction du renforcement de la durée de vie

Dans cette section, nous nous intéressons au phénomène du renforcement de la durée de vie en fatigue des élastomères mis en évidence pour la première fois par [Cadwell \*et al.\* \[1940\]](#) et présenté dans un diagramme de Haigh par [André \*et al.\* \[1999\]](#) (voir chapitre 2, page 33). A ce jour, les mécanismes physiques à l'origine de ce phénomène n'ont toujours pas été identifiés. Certains auteurs l'attribuent à la cristallisation sous contrainte ([Gent \[1994\]](#) et [André \*et al.\* \[1999\]](#)). Il est donc important de tenir compte de la cristallisation sous contrainte pour être capable de prédire le renforcement de la durée de vie.

L'objectif de la présente étude est de montrer qu'il est possible de prédire théoriquement ce renforcement en considérant une loi de comportement et une grandeur prédictive de la durée de vie bien choisies. Il existe dans la littérature quelques modèles phénoménologiques pour la cristallisation sous contrainte (voir par exemple les travaux de [Negahban \[2000\]](#), [Ahzi \*et al.\* \[2003\]](#) ou [Rao \[2003\]](#)). Néanmoins, il convient de souligner que notre objectif ici n'est pas de proposer une loi de comportement adaptée à la cristallisation sous contrainte, mais plutôt de nous placer dans le cadre beaucoup plus simple des modèles viscoélastiques phénoménologiques. Celui-ci est motivé par les observations expérimentales de [Toki \*et al.\* \[2000\]](#) et [Trabelsi \*et al.\* \[2003b\]](#) qui démontrent des similitudes entre la cinétique de la cristallisation et la réponse hystérétique de caoutchouc : l'hystérésis observée lors du chargement cyclique du caoutchouc est la traduction macroscopique du phénomène physique de cristallisation sous contrainte (voir section 1.2.2.3). Pour cela, la première étape consiste à développer une loi de comportement simple permettant de simuler la réponse hystérétique du caoutchouc et un modèle viscoélastique non-linéaire classique semble tout à fait approprié pour cette étude. Ce modèle sera utilisé lors de calcul des grandeurs prédictives classiques, i.e. élongation principale maximale  $\lambda_{\max}$ , contrainte principale maximale  $\sigma_{\max}$ , et la densité d'énergie de déformation  $W$ , ainsi que notre grandeur  $\Sigma^*$  afin de construire théoriquement le diagramme de Haigh. Notons que la viscoélasticité est un phénomène inélastique et que le renforcement dépend de l'histoire de chargement puisqu'il apparaît dès qu'une précharge statique positive est appliquée au caoutchouc,  $\Sigma^*$  sera donc calculée selon la proposition 2 (page 76) et la proposition 3(b) (page 81) du chapitre précédent.

#### 6.3.3.1 Loi de comportement

Considérons une barre rectangulaire en caoutchouc de section uniforme soumise à une traction uniaxiale suivant la direction  $\mathbf{e}_1$  (voir figure 6.25). Supposons l'incompressibilité du

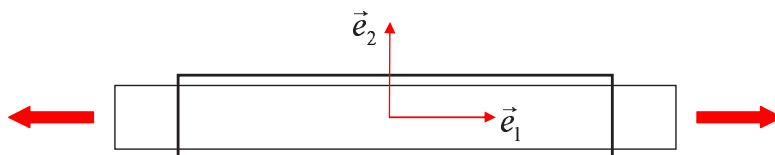


Fig. 6.25: Barre rectangulaire en caoutchouc sous traction uniaxiale.

matériau, la déformation de la barre est alors définie par :

$$x_1 = \lambda X_1 \quad x_2 = \frac{X_2}{\sqrt{\lambda}} \quad x_3 = \frac{X_3}{\sqrt{\lambda}} \quad (6.37)$$

où  $\lambda$  est uniforme et égal au rapport entre les longueurs déformée et non-déformée de l'éprouvette. Comme il l'a été évoqué précédemment, le modèle viscoélastique non-linéaire classique permettant de simuler la réponse hystérétique du caoutchouc est adopté. Celui-ci est composé d'un réseau élastique A (équilibre) représenté par un ressort non-linéaire et un réseau visqueux B (hors-équilibre) représenté par un amortisseur en série avec un ressort non-linéaire comme le montre la figure 6.26. Lorsqu'une sollicitation est appliquée au matériau, le gradient

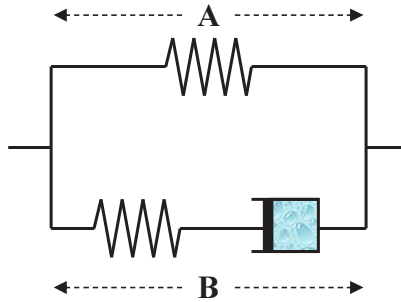


Fig. 6.26: Modèle viscoélastique non-linéaire classique

de la transformation est le même dans les deux réseaux :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_A = \mathbf{F}_B \quad (6.38)$$

De plus, le gradient de la transformation du réseau B se décompose en parties élastique  $\mathbf{F}_e$  et  $\mathbf{F}_i$  :

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_i \quad (6.39)$$

où le tenseur  $\mathbf{F}_i$  permet de définir la configuration intermédiaire. Le tenseur des dilatations de Cauchy-Green gauche  $\mathbf{B}$  et sa partie élastique  $\mathbf{B}_e$  s'écrivent alors :

$$\mathbf{B} = \lambda^2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\lambda} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (6.40)$$

et :

$$\mathbf{B}_e = \lambda_e^2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\lambda_e} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (6.41)$$

La contrainte de Cauchy totale est simplement la somme entre les contraintes équilibre  $\boldsymbol{\sigma}_A$  et hors-équilibre  $\boldsymbol{\sigma}_B$  (voir [Green et Tobolsky \[1946\]](#), [Lion \[1996, 1997\]](#) ou [Bergström et Boyce \[1998\]](#)), ainsi en appliquant  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$  (état de contrainte plan), on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_A + \boldsymbol{\sigma}_B = \left( 2W_I \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) + 2W_I^e \left( \lambda_e^2 - \frac{1}{\lambda_e} \right) \right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (6.42)$$

avec  $W_I = \partial W_A / \partial I_1$  et  $W_I^e = \partial W_B / \partial I_1^e$ . Ici,  $I_1$  and  $I_1^e$  sont les premiers invariants de  $\mathbf{B}$  et de  $\mathbf{B}_e$  respectivement,  $W_A$  et  $W_B$  sont les densités d'énergie de déformation associées aux

réseaux A and B. En supposant que l'amortisseur dans le réseau B suit le comportement d'un fluide newtonien, son taux de déformation est donné par (Huber et Tsakmakis [2000]) :

$$\mathbf{D}_i = \frac{1}{\eta} (\mathbf{F}_e^T \boldsymbol{\sigma}_B^{\text{ex}} \mathbf{F}_e^{-T})_{\text{déviatorique}} \quad (6.43)$$

où  $\eta$  représente la viscosité et  $\boldsymbol{\sigma}_B^{\text{ex}}$  est la partie supplémentaire de  $\boldsymbol{\sigma}_B$  définie par :

$$\boldsymbol{\sigma}_B^{\text{ex}} = 2W_I^e \lambda_e^2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (6.44)$$

Dans la suite, la densité de déformation suivante est retenue :

$$\begin{aligned} W &= W_A(I_1) + W_B(I_1^e) \\ &= C_{A1}(I_1 - 3) + C_{A2}(I_1 - 3)^2 + C_{A3}(I_1 - 3)^3 + C_B(I_1^e - 3) \end{aligned} \quad (6.45)$$

et les constantes du modèle sont :

$$\begin{aligned} C_{A1} &= 1 \text{ MPa} & C_{A2} &= -10^{-2} \text{ MPa} & C_{A3} &= 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ MPa} \\ C_B &= 6 \text{ MPa} & \eta &= 2 \text{ MPa.s} \end{aligned} \quad (6.46)$$

Celles-ci sont choisies de manière complètement arbitraire afin de fournir un comportement *physiquement acceptable*. Aucune donnée expérimentale n'a été utilisée. La vitesse de déformation est fixée  $\dot{\lambda} = 1 \text{ s}^{-1}$ . La figure 6.27(b) présente la réponse du modèle à l'histoire d'élongation de la figure 6.27(a). Durant ce calcul, l'amplitude d'élongation,  $\lambda_{\text{amp}}$ , est fixée alors que l'élongation moyenne,  $\lambda_m$ , est variée. Pour une amplitude d'élongation donnée, la taille de la boucle d'hystérésis diminue lorsque l'élongation moyenne augmente. Des résultats similaires ont été expérimentalement obtenus par Lion [1996] and Abraham *et al.* [2005].

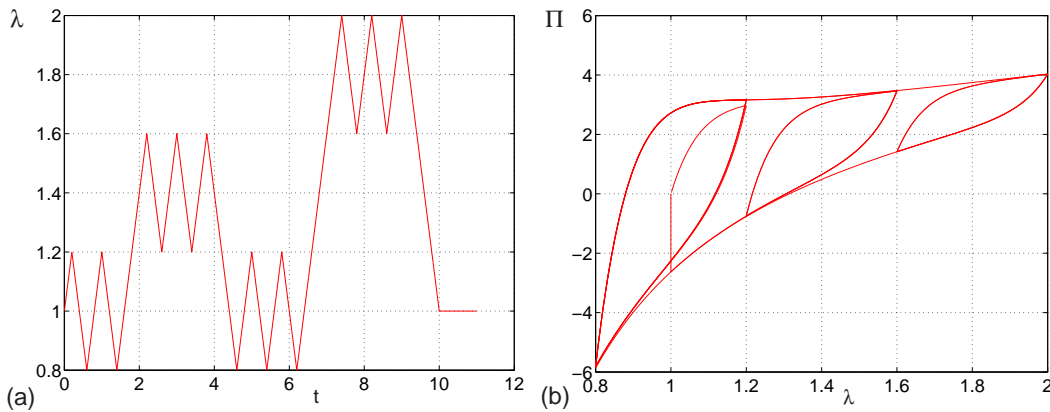


Fig. 6.27: (a) Elongation imposée (b) Réponse du modèle

### 6.3.3.2 Calcul des grandeurs prédictives au cours d'un cycle

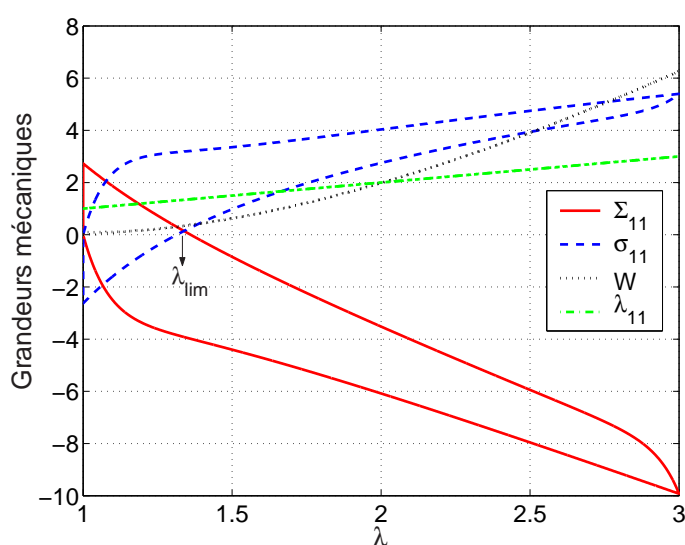
Comme nous l'avons déjà évoqué,  $\Sigma^*$  est calculée selon la proposition 2 et la proposition 4 du chapitre précédent. Il convient donc de cumuler les incréments de la contrainte configurationnelle effective pour un cycle (charge et décharge), plus particulièrement les parties qui

contribuent à la croissance de défauts. Les résultats obtenus seront comparés avec ceux des grandeurs classiques. Ces dernières seront également évaluées au cours d'un cycle.

Dans le cas de chargement uniaxial, la contrainte configurationnelle effective  $\bar{\Sigma}$  et la contrainte configurationnelle  $\Sigma$  (ainsi que  $\bar{\Sigma}^d$  et  $\Sigma^d$ ) sont confondues.

$$\bar{\Sigma}|_{\text{traction uniaxiale}} = \Sigma \quad \text{et} \quad \bar{\Sigma}^d|_{\text{traction uniaxiale}} = \Sigma^d \quad (6.47)$$

Dans un premier temps, nous nous proposons d'observer l'évolution de quelques grandeurs mécanique, i.e. la contrainte de Cauchy  $\sigma$ , la densité d'énergie de déformation  $W$  et la contrainte configurationnelle  $\Sigma$ , lors d'un cycle (charge et décharge). Les résultats sont présentés sur la figure 6.28. Notons que lors de décharge,  $\sigma_{11}$  et  $\Sigma_{11}$  changent de signe pour  $\lambda = \lambda_{\text{lim}} \approx$



**Fig. 6.28:** Evolution des grandeurs mécaniques en fonction d'élongation dans le chargement de traction uniaxiale.

1,35. Il faut donc exclure les contributions de  $\sigma_{11}$  ou de  $\Sigma_{11}$  lors du déchargement pour  $\lambda \leq \lambda_{\text{lim}}$  dans le cumul puisqu'elles ne contribuent pas à la croissance de défauts (voir l'équation (5.28), page 80).

Ce paragraphe est consacré au cumul de chaque grandeur prédictive lors d'un cycle. Il convient de souligner que dans le cas de la traction uniaxiale, la seule variable de chargement est l'extension principale dans la direction de traction, notée,  $\lambda$ . Les directions principales de déformations ne tournent pas et la fissure apparaîtra dans le plan orthogonal à la direction de traction. Ainsi l'expression de chaque grandeur prédictive cumulée est :

**Elongation maximale :**

$$\lambda_{\text{max}} = \int_{\text{cycle}} |d\lambda| = \int_{\text{cycle}} |\dot{\lambda}| dt \quad (6.48)$$

**Énergie de déformation :**

$$W = \int_{\text{cycle}} |dW| = \int_{\text{cycle}} \left| \left[ \frac{dW_A}{dI_1} \frac{dI_1}{d\lambda} + \frac{dW_B}{dI_1^e} \frac{dI_1^e}{d\lambda_e} \frac{d\lambda_e}{d\lambda} \right] \dot{\lambda} \right| dt \quad (6.49)$$

Pour la traction uniaxiale et en considérant l'équation (6.45), on a :

$$\frac{dI_1}{d\lambda} = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad \frac{dI_1^e}{d\lambda_e} = 2 \left( \lambda_e - \frac{1}{\lambda_e^2} \right) \quad (6.50)$$

et

$$\frac{dW_A}{dI_1} = C_{A1} + 2C_{A2}(I_1 - 3) + 3C_{A3}(I_1 - 3)^2 \quad \frac{dW_B}{dI_1^e} = C_B \quad (6.51)$$

### Contrainte maximale :

Comme nous l'avons constaté, il faut exclure les contributions de  $\sigma_{11}$  lors de déchargement pour  $\lambda \leq \lambda_{\text{lim}}$  dans le cumul puisqu'elles ne contribuent pas à la croissance de défauts. Ainsi, posons  $d\sigma = 0$  lorsque  $\sigma_{11} < 0$  (voir figure 6.28). D'après l'équation (6.42), la grandeur prédictive est donnée par :

$$\sigma_{\text{max}} = \int_{\text{cycle}} |d\sigma| = \int_{\text{cycle}} \left| \left[ \frac{d\sigma_A}{d\lambda} + \frac{d\sigma_B}{d\lambda_e} \frac{d\lambda_e}{d\lambda} \right] \dot{\lambda} \right| dt \quad (6.52)$$

### Notre grandeur :

La contrainte configurationnelle effective s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} = \Sigma = & \left( W_A + W_B - 2W_I \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) - 2W_I^e \left( \lambda_e^2 - \frac{1}{\lambda_e} \right) \right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ & + (W_A + W_B) (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (6.53)$$

Avec  $W_I = dW_A/dI_1$  et  $W_I^e = dW_B/dI_1^e$ . Comme lors du calcul de  $\sigma_{\text{max}}$ , nous considérons ici que  $d\Sigma = 0$  lorsque  $\Sigma_{11} > 0$  afin de tenir compte uniquement les incréments qui contribuent à la croissance de défauts. Il vient alors :

$$\Sigma^* = \int_{\text{cycle}} |d\Sigma| = \int_{\text{cycle}} \left| \left[ \frac{d\Sigma_A}{d\lambda} + \frac{d\Sigma_B}{d\lambda_e} \frac{d\lambda_e}{d\lambda} \right] \dot{\lambda} \right| dt \quad (6.54)$$

où :

$$\begin{aligned} \Sigma_A = & \left( W_A - 2W_I \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + W_A (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \\ \Sigma_B = & \left( W_B - 2W_I^e \left( \lambda_e^2 - \frac{1}{\lambda_e} \right) \right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + W_B (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (6.55)$$

### ▷ Remarque :

Le calcul des grandeurs prédictives nécessite l'expression de  $d\lambda_e/d\lambda$ . Pour cela, portons à présent notre attention à la contrainte de Cauchy :

$$\sigma_{11}(\lambda, \lambda_i) = \sigma_{A11}(\lambda) + \sigma_{B11}(\lambda, \lambda_i) \quad (6.56)$$



la différentiation de  $\sigma_{11}$  s'écrit :

$$d\sigma_{11}(\lambda, \lambda_i) = \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\lambda_i}d\lambda_i \quad (6.57)$$

avec :

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\lambda} = \frac{\partial\sigma_{A11}}{\partial\lambda} + \frac{\partial\sigma_{B11}}{\partial\lambda_e} \frac{1}{\lambda_i} \quad \text{and} \quad \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\lambda_i} = \frac{\partial\sigma_{B11}}{\partial\lambda_e} \left( -\frac{\lambda}{\lambda_i^2} \right) \quad (6.58)$$

Ici, nous avons utilisé la relation  $\lambda = \lambda_e \lambda_i$ . Posons :

$$d\lambda = \dot{\lambda}dt \quad \text{et} \quad d\lambda_i = \dot{\lambda}_i dt \quad (6.59)$$

on a :

$$d\sigma_{11} = \left[ \frac{\partial\sigma_{A11}}{\partial\lambda} \dot{\lambda} + \frac{\partial\sigma_{B11}}{\partial\lambda_e} \left( \frac{\dot{\lambda}}{\lambda_i} - \frac{\lambda \dot{\lambda}_i}{\lambda_i^2} \right) \right] dt \quad (6.60)$$

Puisqu'on peut également écrire l'équation (6.56) sous la forme :

$$\sigma_{11}(\lambda, \lambda_e) = \sigma_{A11}(\lambda) + \sigma_{B11}(\lambda_e) \quad (6.61)$$

il vient donc :

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda_i} - \frac{\lambda \dot{\lambda}_i}{\lambda_i^2} = \frac{d\lambda_e}{d\lambda} \dot{\lambda} \quad (6.62)$$

Finalement nous obtenons :

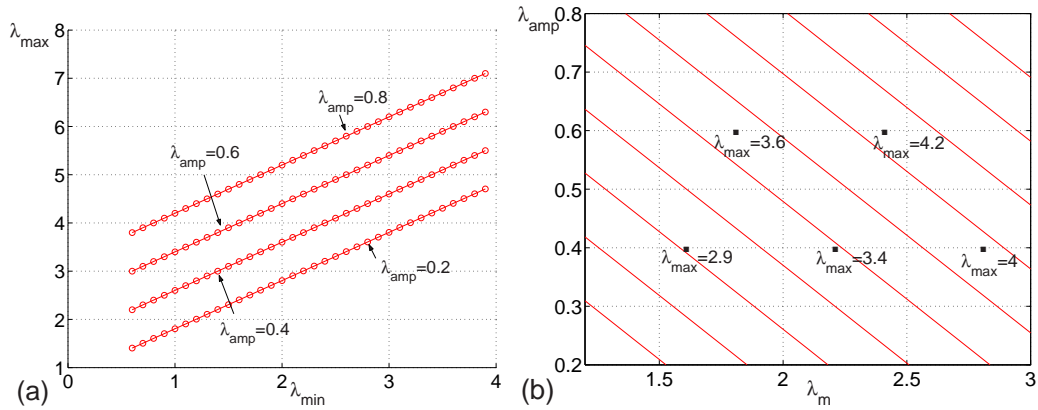
$$\frac{d\lambda_e}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda_i} \left( 1 - \frac{\lambda \dot{\lambda}_i}{\dot{\lambda} \lambda_i} \right) \quad (6.63)$$

### 6.3.3.3 Résultats et discussion

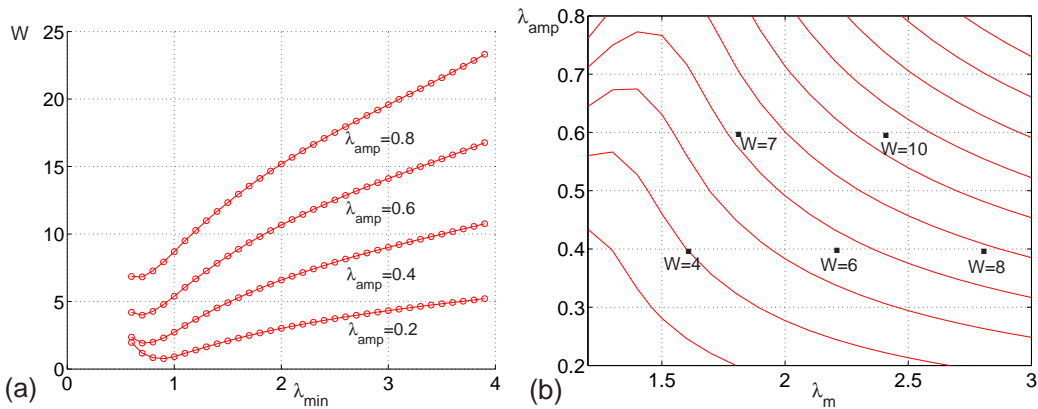
Nous avons vu dans la section précédente, les formulations des grandeurs prédictives cumulées au cours d'un cycle. Notre attention se porte à présent sur la construction théorique du diagramme de Haigh. Pour cela, différents chargements en déplacement imposé sont considérés. Classiquement, le nombre de cycles à la fin de vie est tracé en fonction de contrainte moyenne  $\sigma_m$  et de l'amplitude de contrainte  $\sigma_{amp}$  (André *et al.* [1999]). Ici, nous le présenterons plutôt en fonction de l'élongation moyenne  $\lambda_m$ , et de l'amplitude de l'élongation  $\lambda_{amp}$ . De plus, les lignes d'iso-durée de vie seront remplacées par les lignes d'iso-valeur de chaque grandeur prédictive.

Pour  $\lambda_{amp}$  et  $\lambda_m$  données, la valeur des différentes grandeurs prédictives dans un cycle est calculée. Deux résultats seront présentés pour chaque grandeur. Le premier est l'évolution de la grandeur prédictive en fonction de l'élongation minimale  $\lambda_{min}$ , Ce qui permet de mettre en évidence la valeur minimale d'élongation à partir de laquelle le renforcement de la durée de vie apparaît. Le deuxième est le diagramme de Haigh théorique. Les résultats sont présentés sur les figures 6.29 à 6.32.

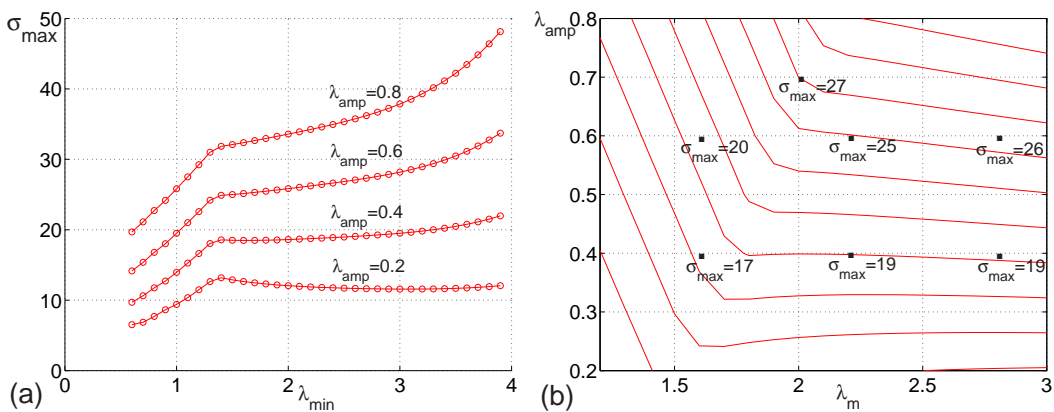
Observons la figure 6.29, il est clair que l'élongation principale maximale n'est pas capable de prédire le renforcement de la durée de vie. En effet, la durée de vie décroît toujours



**Fig. 6.29:** (a) Evolution de  $\lambda_{\max}$  (b) Diagramme de Haigh en  $\lambda_{\max}$

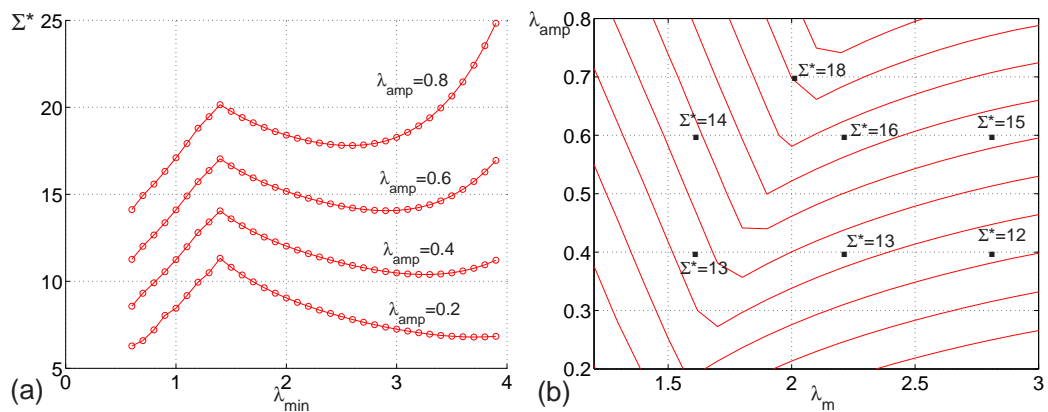


**Fig. 6.30:** (a) Evolution de  $W$  (b) Diagramme de Haigh en  $W$



**Fig. 6.31:** (a) Evolution de  $\sigma_{\max}$  (b) Diagramme de Haigh en  $\sigma_{\max}$

(l'élongation principale maximale croît) lorsque  $\lambda_m$  ou  $\lambda_{\text{amp}}$  augmente. Des résultats similaires sont obtenus en utilisant la densité d'énergie de déformation comme le montre la figure 6.30. En fait, lors de la transition de traction-compression (TC) à traction-traction (TT), une petite augmentation de la durée de vie ( $W$  diminue) est observée. Néanmoins, l'origine de cette



**Fig. 6.32:** (a) Evolution de  $\Sigma^*$  (b) Diagramme de Haigh en  $\Sigma^*$

augmentation est assez difficile à expliquer.

La contrainte principale maximale donne des résultats assez satisfaisants comme le montre la figure 6.31. Ceci est surprenant puisque les observations expérimentales démontrent que la durée de vie est plutôt piloté par l'énergie que par la contrainte ou la déformation (Abraham *et al.* [2005]). A notre avis, ceci est dû au fait que la contrainte est cumulée dans un cycle, et seule la partie qui contribue à la croissance de défauts est prise en compte ce qui n'est pas le cas lorsque la contrainte principale maximale est adopté dans la littérature (Abraham *et al.* [2005] et André *et al.* [1999]). Les meilleurs résultats sont obtenus avec notre grandeur (figure 6.32). Le renforcement de la durée de vie est nettement observé.  $\sigma_{\text{amp}}$  et  $\Sigma^*$  prédisent que ce renforcement débute à  $\lambda_{\min} > 1$ . Ce résultat est qualitativement en accord avec les observations expérimentales de Cadwell *et al.* [1940] qui constatent que le renforcement a lieu pour un niveau de déformation minimal légèrement positif. Finalement, il convient de noter que les résultats obtenus dépendent fortement des constantes du modèle utilisés.

## 6.4 Rôle de l'inhomogénéité

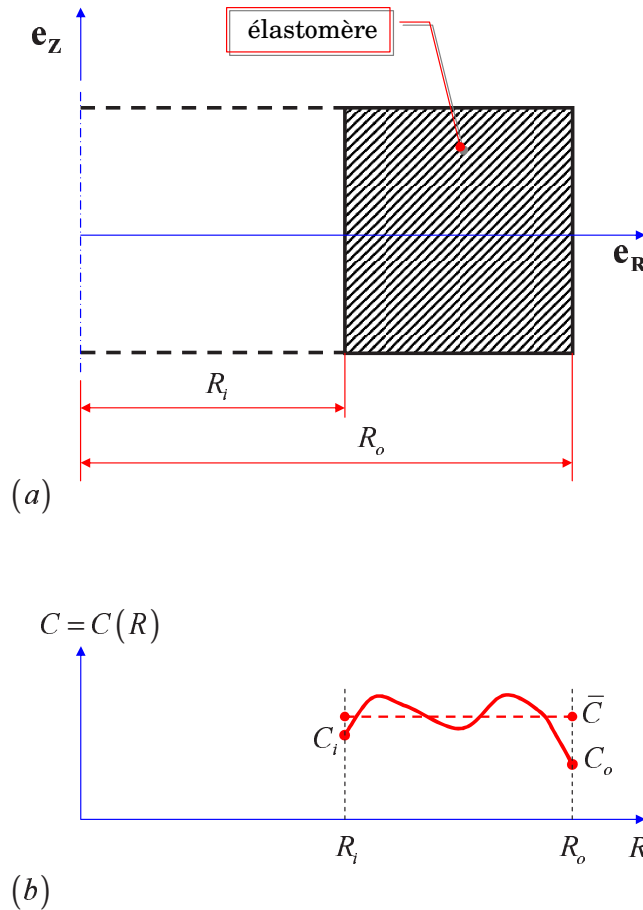
Afin de clore ce chapitre consacré à l'application de notre théorie, nous proposons ici une petite étude exploratoire visant à montrer quelques possibilités offertes par l'utilisation de la mécanique configurationnelle dans le contexte de la fatigue des élastomères. Notre discussion dans cette section porte sur l'étude théorique de l'influence de l'inhomogénéité sur la prédiction de la durée de vie. L'objectif ici est de déterminer si une petite variation des propriétés mécaniques des élastomères telle que la rigidité peut avoir un effet significatif sur la durée de vie.

L'étude porte sur la durée de vie des éprouvettes simplifiées de Mars [2001] sollicitées en traction-torsion. Dans un premier temps, une forme inhomogène de la densité d'énergie de déformation néo-Hookéenne est adoptée afin de calculer  $\Sigma_{\text{inh}}^*$ , notre grandeur prédictive étendue au cadre inhomogène. Ici, nous supposons que la rigidité du matériau varie de manière linéaire puis sinusoidale autour de sa valeur moyenne en fonction de la position radiale des points matériels. La relation empirique entre notre grandeur prédictive et la durée de vie  $N_f$  sera établie grâce aux résultats obtenus dans la section 6.3.2 (figures 6.10 et 6.16). Cette relation

empirique nous permettra ensuite de calculer la durée de vie inhomogène  $N_f^{\text{inh}}$ . Finalement quelques résultats seront présentés.

### 6.4.1 Modélisation de l'inhomogénéité

Considérons la géométrie simplifiée des éprouvettes utilisées par Mars [2001] (figure 2.7, page 34) sur la figure 6.33(a). Supposons que la rigidité varie en fonction du rayon de cylindre



**Fig. 6.33:** (a) Éprouvette de Mars simplifiée. (b) Evolution de  $C$  en fonction de la position des points matériels.

de manière linéaire puis sinusoidale. Ainsi, la densité d'énergie de déformation pour un modèle néo-Hookéen inhomogène dans le cas de la traction-torsion s'écrit (équation (6.24)) :

$$W = C(R) (I_1 - 3) = C(R) \left( \lambda^2 + \lambda \tau^2 R^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \quad (6.64)$$

avec :

$$C(R) = \bar{C} \left[ 1 - \xi \left\{ 1 - 2 \left( \frac{R - R_i}{R_o - R_i} \right) \right\} \right] \quad (6.65)$$

pour la variation linéaire, et :

$$C(R) = \bar{C} \left[ 1 + \zeta \sin \left\{ 2\pi n \left( \frac{R - R_i}{R_o - R_i} \right) \right\} \right] \quad (6.66)$$

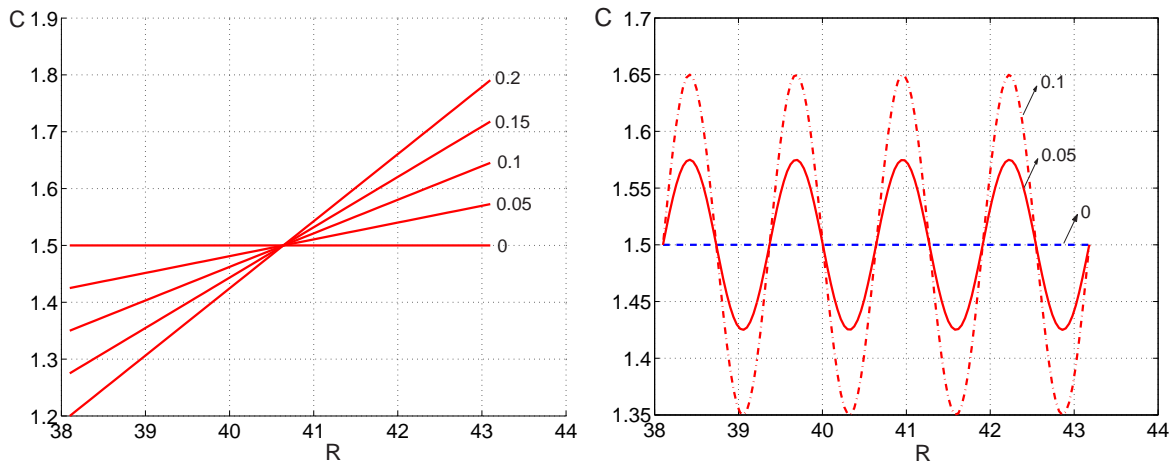
pour la variation sinusoïdale. Dans cette expression,  $\bar{C}$  est la valeur moyenne de  $C$  qui vaut 1,5 MPa et  $\xi$  et  $\zeta$  sont définies par :

$$\xi = \left( \frac{C_o - \bar{C}}{\bar{C}} \right) \quad (6.67)$$

et :

$$\zeta = \left( \frac{C_{\max} - \bar{C}}{\bar{C}} \right) \quad (6.68)$$

où  $C_o$  est la rigidité des points matériels qui se situe en  $R = R_o$  et  $C_{\max}$  est la rigidité maximale.  $n$  quantifie la périodicité de l'inhomogénéité. La figure 6.34 présente les variations linéaire et sinusoïdale de la rigidité pour différentes valeurs de  $\xi$  et  $\zeta$ .



**Fig. 6.34:** (a) Variation linéaire de la rigidité  $C(R)$  (équation (6.65)) pour  $\xi=[0; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2]$ . (b) Variation sinusoïdale de la rigidité  $C(R)$  (équation (6.66)) pour  $n=4$  et  $\zeta=[0; 0,05; 0,1]$ .

## 6.4.2 Mise en équations

Le tenseur des contraintes configurationnelles fourni par l'équation (5.6) devient :

$$\Sigma(R) = (W + p) \mathbf{I} - 2C(R)\mathbf{C} \quad (6.69)$$

avec :

$$p = p(R) = \frac{2C(R)}{\lambda} + 2\lambda\tau^2 \int_R^{R_o} sW_I(s)ds \quad (6.70)$$

Notons  $\Omega(R)$  la fonction :

$$\Omega(R) = \int_R^{R_o} sW_I(s)ds \quad (6.71)$$

pour la variation linéaire (équation (6.65)), cette fonction est :

$$\Omega(R) = \frac{\bar{C}}{2} \left( 1 - \frac{2\xi R_i}{R_o - R_i} \right) (R_o^2 - R^2) + \frac{2\xi\bar{C}}{3(R_o - R_i)} (R_o^3 - R^3) \quad (6.72)$$

et pour la variation sinusoïdale de  $C$  (équation (6.66)), elle est définie par :

$$\Omega(R) = \bar{C} \left[ \frac{(R_o^2 - R_i^2)}{2} + \frac{\zeta \kappa}{n^2} \right] \quad (6.73)$$

avec

$$\begin{aligned} \kappa = & [\sin(n(R_o - R_i)) - nR_o \cos(n(R_o - R_i))] \\ & - [\sin(n(R - R_i)) - nR_o \cos(n(R - R_i))] \end{aligned} \quad (6.74)$$

La contrainte configurationnelle dans l'équation (6.29) devient donc :

$$\begin{aligned} \Sigma(R) = & \left[ C(R) \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} + \lambda \tau^2 R^2 - 3 \right) + 2\lambda \tau^2 \Omega(R) \right] (\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\Theta) \\ & + \left[ C(R) \left( -\lambda^2 + \frac{4}{\lambda} - \lambda \tau^2 R^2 - 3 \right) + 2\lambda \tau^2 \Omega(R) \right] \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_Z \\ & - 2C(R)R\tau (\mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_\Theta) \end{aligned} \quad (6.75)$$

Finalement, afin de cumuler sur un cycle la contrainte configurationnelle, on rappelle que l'incrément de contrainte configurationnelle s'écrit (équation (6.30)) :

$$d\Sigma = \left( \frac{d\Sigma}{d\lambda} \dot{\lambda} + \frac{d\Sigma}{d\tau} \dot{\tau} \right) dt$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma}{d\lambda} = & \left[ C(R) \left( 2\lambda - \frac{2}{\lambda^2} + \tau^2 R^2 \right) + 2\tau^2 \Omega(R) \right] (\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\Theta) \\ & + \left[ C(R) \left( -2\lambda - \frac{4}{\lambda^2} - \tau^2 R^2 \right) + 2\tau^2 \Omega(R) \right] \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_Z \end{aligned} \quad (6.76)$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma}{d\tau} = & [2C(R)\lambda\tau R^2 + 4\lambda\tau\Omega(R)] (\mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_\Theta) - 2C(R)R (\mathbf{e}_\Theta \otimes \mathbf{e}_Z + \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_\Theta) \\ & + [-2C(R)\lambda\tau R^2 + 4\lambda\tau\Omega(R)] \mathbf{e}_Z \otimes \mathbf{e}_Z \end{aligned} \quad (6.77)$$

A chaque incrément de chargement ( $d\lambda = \dot{\lambda} dt$  et  $d\tau = \dot{\tau} dt$ ), l'incrément de la contrainte configurationnelle  $d\Sigma$  est calculé. La partie qui contribue à la croissance de micro-défauts est donnée par l'équation (5.23) :

$$d\Sigma^d = \min(d\Sigma_i, 0) \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i$$

où  $(d\Sigma_i)_{i=1,2,3}$  et  $(\mathbf{v}_i)_{i=1,2,3}$  sont les valeurs propres et leurs vecteurs propres associés. En exprimant  $d\Sigma^d$  dans la configuration initiale à l'aide des coordonnées cylindriques  $(R, \Theta, Z)$ , on a :

$$d\Sigma^d = (d\Sigma_{ij}^d \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)_{i,j=R,\Theta,Z}$$

La contrainte configurationnelle cumulée lors d'un cycle est alors :

$$\Sigma^d = \int_{\text{cycle}} d\Sigma^d$$

et la valeur de grandeur prédictive inhomogène  $\Sigma_{inh}^*$  est simplement donnée par la plus petite valeur propre de  $\Sigma^d$  :

$$\Sigma_{inh}^* = \left| \min \left[ (\Sigma_i^d)_{i=1,2,3}, 0 \right] \right|$$

### 6.4.3 Résultats et discussion

Nous pouvons à présent calculer  $\Sigma^*$ , la valeur du prédicteur dans le cas homogène ( $C(R) = \bar{C}, \forall R$ ), et  $\Sigma_{inh}^*$  pour différents cas de chargement. La durée de vie peut être déterminée grâce aux résultats expérimentaux de Mars en reliant de manière empirique  $\Sigma^*$  à la durée de vie  $N_f$ . Ici, nous supposons que cette dernière suit une loi puissance du type :

$$\Sigma^* = a_0 (N_f)^{a_1} \quad \text{ou} \quad N_f = b_0 (\Sigma^*)^{b_1} \quad (6.78)$$

où  $b_1 = 1/a_1$  et  $b_0 = a_0^{-b_1}$  sont des constantes à déterminer. En prenant en compte le nombre des points expérimentaux dans chaque essai, les valeurs moyennes de  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$  et  $b_1$  obtenues sont données dans le tableau 6.2 et la courbe correspondante est présentée sur la figure 6.35.

| Constante | Valeur moyenne    |
|-----------|-------------------|
| $a_0$     | 90,210            |
| $a_1$     | -0,227            |
| $b_0$     | $4,12 \cdot 10^8$ |
| $b_1$     | -4,405            |

**Tab. 6.2:** Valeurs moyennes des constantes utilisées.

Tout d'abord, nous nous intéressons aux distributions de la durée de vie en chaque point matériel pour différents types de chargement (ceux-ci sont précisés dans les légendes des figures correspondantes). Les résultats sont présentés sur les figures (6.36)-(6.41) pour la variation linéaire et sur les figures (6.42)-(6.44) pour la variation sinusoïdale. Les résultats montrent que la variation de la rigidité du matériau peut provoquer une variation importante de la durée de vie. Par ailleurs, le modèle prédit qu'en torsion, la durée de vie augmente dès qu'un chargement de traction cyclique est appliqué jusqu'à  $\lambda \approx 1,5$  au-delà duquel la durée de vie diminue (voir les figures 6.42, 6.43 et 6.44).

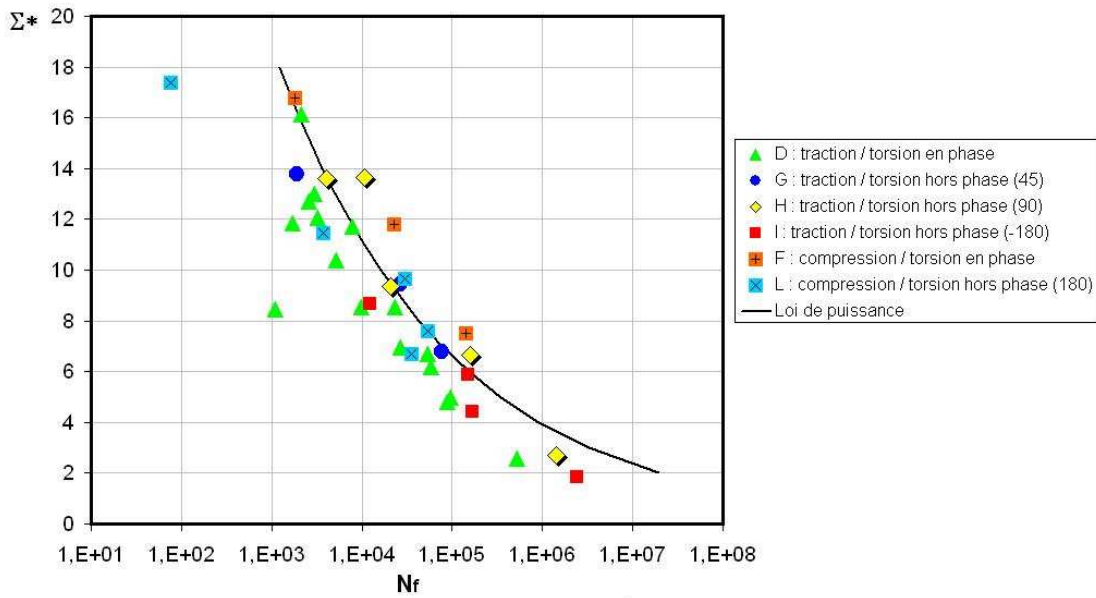


Fig. 6.35: Recalage des données expérimentales avec une loi de puissance.

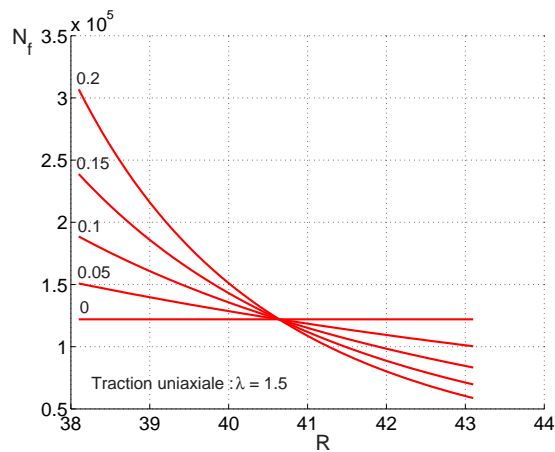
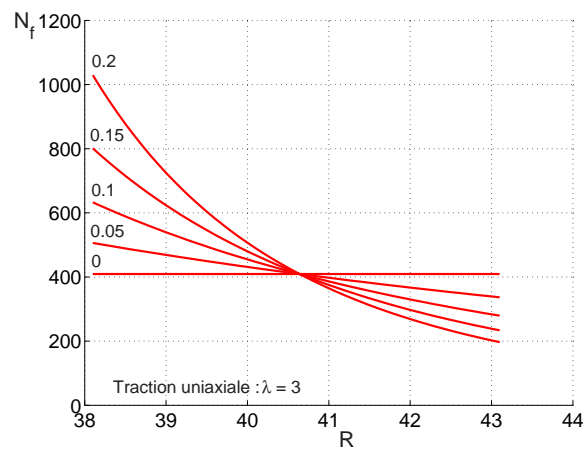
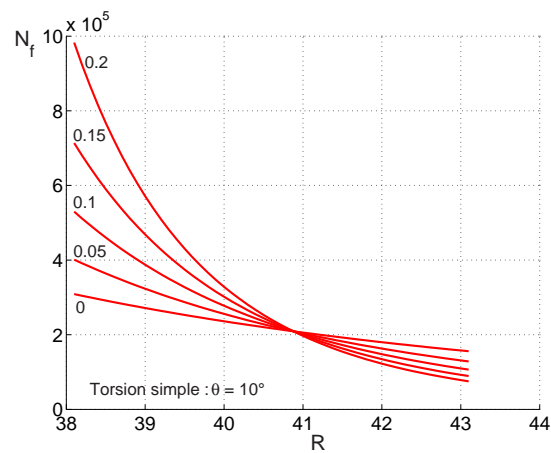


Fig. 6.36: Distribution de la durée de vie en traction simple ( $\lambda = 1,5$ ) pour la variation linéaire de la rigidité  $C$ .

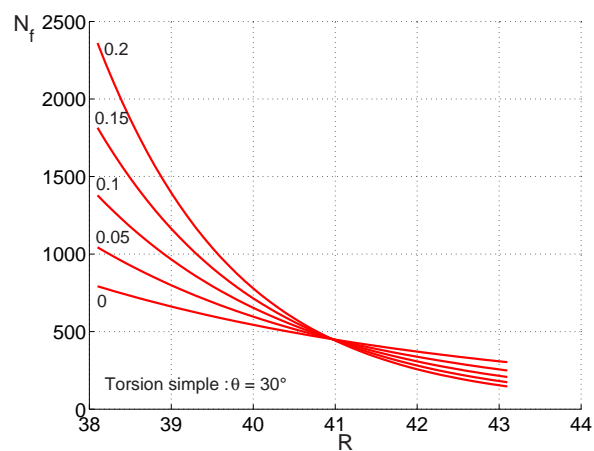




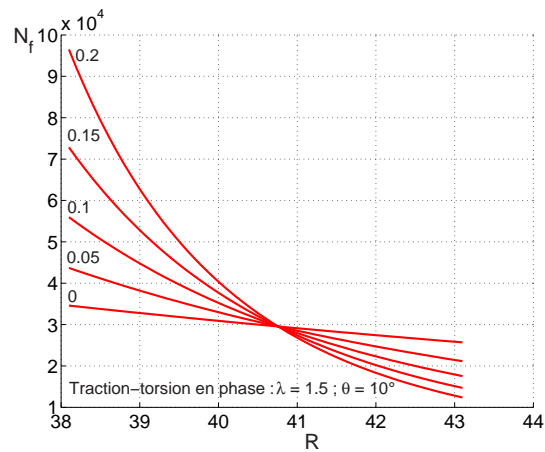
**Fig. 6.37:** Distribution de la durée de vie en traction simple ( $\lambda = 3$ ) pour la variation linéaire de la rigidité  $C$ .



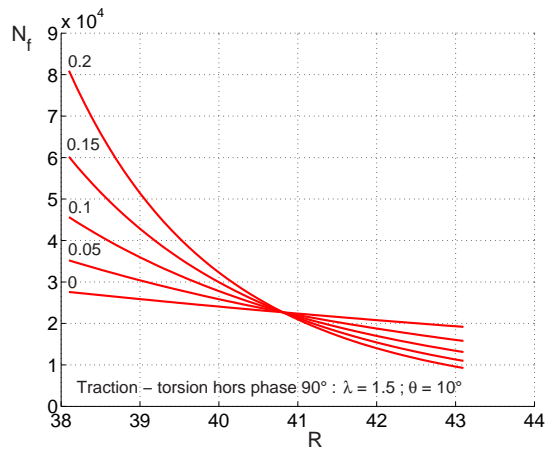
**Fig. 6.38:** Distribution de la durée de vie en torsion simple ( $\theta = 10^\circ$ ) pour la variation linéaire de la rigidité  $C$ .



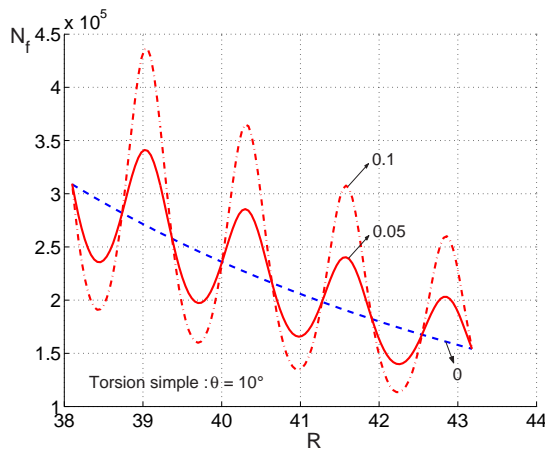
**Fig. 6.39:** Distribution de la durée de vie en torsion simple ( $\theta = 30^\circ$ ) pour la variation linéaire de la rigidité  $C$ .



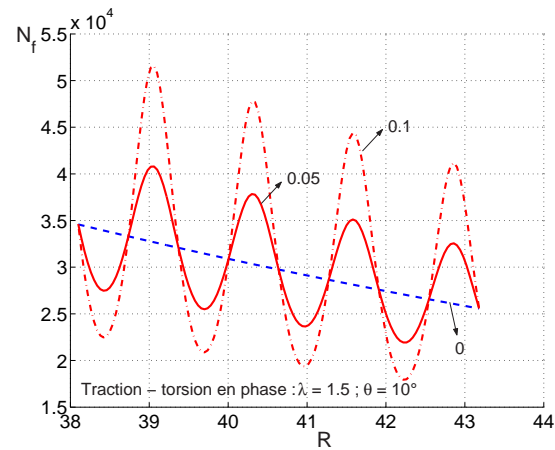
**Fig. 6.40:** Distribution de la durée de vie en traction-torsion en phase ( $\lambda = 1,5$ ;  $\theta = 10^\circ$ ) pour la variation linéaire de la rigidité  $C$ .



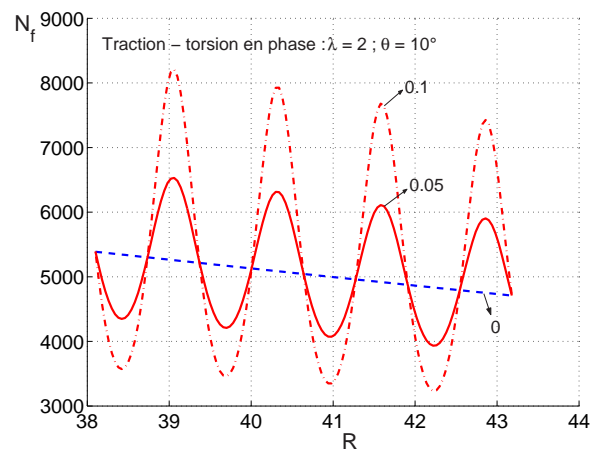
**Fig. 6.41:** Distribution de la durée de vie en traction-torsion hors-phase ( $\lambda = 1,5$ ;  $\theta = 10^\circ$ ) pour la variation linéaire de la rigidité  $C$ .



**Fig. 6.42:** Distribution de la durée de vie en torsion simple ( $\theta = 10^\circ$ ) pour la variation sinusoïdale de la rigidité  $C$ .



**Fig. 6.43:** Distribution de la durée de vie en traction-torsion en phase ( $\lambda = 1,5$ ;  $\theta = 10^\circ$ ) pour la variation sinusoïdale de la rigidité  $C$ .



**Fig. 6.44:** Distribution de la durée de vie en traction-torsion en phase ( $\lambda = 2$ ;  $\theta = 10^\circ$ ) pour la variation sinusoïdale de la rigidité  $C$ .

Dans la suite, nous nous intéressons à la "chute" de la durée de vie due à la variation de la rigidité à la surface extérieure du cylindre ( $R = R_o$ ). Évidemment, les deux formulations précédentes (linéaire et sinusoidale) peuvent être utilisées. Ici, nous noterons  $\xi$  (comme dans le cas linéaire, équation (6.65)) la différence de rigidité entre  $C_0$  et  $\bar{C}$  :

$$\xi = \left( \frac{C_0 - \bar{C}}{\bar{C}} \right) \cdot 100\% \quad (6.79)$$

Le calcul de la chute de la durée de vie, notée  $\Delta N_f$ , est effectué comme suit : pour un type de chargement et un niveau de déformation donnés,  $\Sigma^*$  puis sa contrepartie inhomogène  $\Sigma_{inh}^*$ , obtenue en faisant varier le paramètre  $\xi$ , sont calculées. Grâce à l'équation (6.78), la variation de la durée de vie  $\Delta N_f$  est alors simplement donnée par :

$$\Delta N_f = \left( \frac{N_f^{inh} - N_f}{N_f} \right) \cdot 100\% = \left[ \left( \frac{\Sigma_{inh}^*}{\Sigma^*} \right)^{b_1} - 1 \right] \cdot 100\% \quad (6.80)$$

où  $N_f^{inh}$  est la durée de vie calculée avec le modèle non-homogène. Dans la suite,  $\Delta N_f$  sera calculé pour les cas de chargement de traction uniaxiale, de torsion simple ainsi que de traction/torsion en phase (proportionnel) et hors-phase (non-proportionnel).

Les tableaux 6.3-6.7 présentent la variation de la durée de vie  $\Delta N_f$  en fonction du paramètre  $\xi$ . Quatre types de chargement sont considérés : traction uniaxiale, torsion simple, traction/torsion en-phase et hors-phase. Les courbes correspondantes au chargement de torsion simple sont présentées sur les figure 6.45 et 6.46. Au regard de ces résultats, quelques remarques peuvent être faites :

- Il est clair qu'une petite variation de la rigidité  $\xi$  peut provoquer une réduction assez importante de la durée de vie. De manière générale, le modèle prédit qu'une augmentation de 15% de rigidité ( $\xi = 15\%$ ) en surface du cylindre peut réduire presque de moitié la durée de vie des pièces dans tous les cas de chargement ;
- Cette réduction est indépendante du niveau d'élongation dans le cas de la traction uniaxiale (tableau 6.3). Un résultat similaire est également observé par Saravanan et Rajagopal [2003] ;
- Pour  $\xi$  donnée, la chute de la durée de vie dépend très peu du type de sollicitation. En effet, pour  $\xi = 15\%$ , les chutes de la durée de vie sont 45%, 47%, 47% et 48% en traction uniaxiale, en torsion simple, en traction/torsion en phase et en traction/torsion hors-phase respectivement ;
- Un phénomène similaire au renforcement de la durée de vie est observé. En effet, dans le cas de traction/torsion en phase, pour un angle de torsion donnée, la chute de la durée de vie diminue avec l'augmentation d'élongation (tableaux 6.5 et 6.6) ;
- La réduction de la durée de vie augmente avec l'angle de phase (tableau 6.7).

Ainsi cette petite étude exploratoire permet de mettre en évidence l'importance de la prise en compte de l'inhomogénéité dans la prévision de la durée de vie.

| $\xi$ | $\Delta N_f$ |
|-------|--------------|
| 5%    | -19,07%      |
| 10%   | -33,87%      |
| 15%   | -45,48%      |
| 20%   | -54,69%      |

**Tab. 6.3:** Chute de la durée de vie en fonction de la variation de la rigidité du matériau en traction uniaxiale.

| $\xi$ | $\Delta N_f$        |                     |                     |
|-------|---------------------|---------------------|---------------------|
|       | $\theta = 10^\circ$ | $\theta = 20^\circ$ | $\theta = 30^\circ$ |
| 5%    | -19,83%             | -20,15%             | -20,20%             |
| 10%   | -35,04%             | -35,55%             | -35,76%             |
| 15%   | -46,86%             | -47,46%             | -47,71%             |
| 20%   | -56,15%             | -56,78%             | -57,05%             |

**Tab. 6.4:** Chute de la durée de vie en fonction de la variation de la rigidité du matériau en torsion simple avec différents angles de torsion.

| $\xi$ | $\Delta N_f (\theta = 10^\circ)$ |               |               |
|-------|----------------------------------|---------------|---------------|
|       | $\lambda=1,5$                    | $\lambda = 2$ | $\lambda = 3$ |
| 10%   | -34,44%                          | -34,16%       | -33,98%       |
| 15%   | -46,15%                          | -45,83%       | -45,61%       |

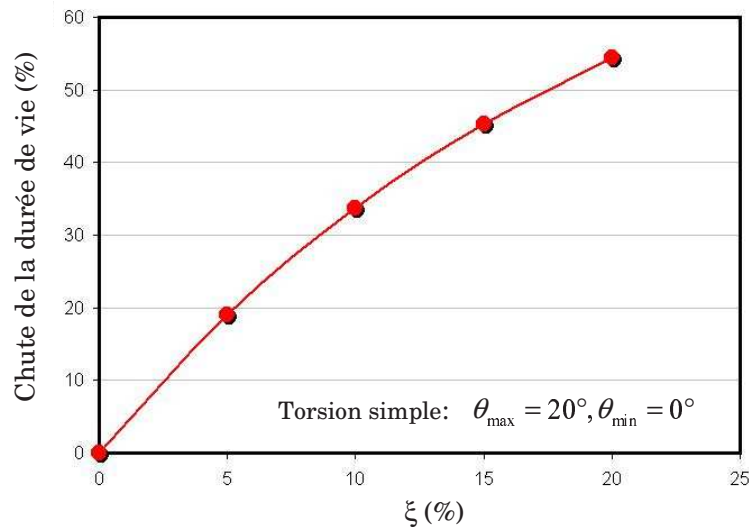
**Tab. 6.5:** Chute de la durée de vie en fonction de la variation de la rigidité du matériau en traction/torsion en phase avec différentes elongations pour  $\theta = 10^\circ$ .

| $\xi$ | $\Delta N_f (\theta = 30^\circ)$ |               |               |
|-------|----------------------------------|---------------|---------------|
|       | $\lambda=1,5$                    | $\lambda = 2$ | $\lambda = 3$ |
| 10%   | -35,67%                          | -35,26%       | -34,62%       |
| 15%   | -47,59%                          | -47,11%       | -46,37%       |

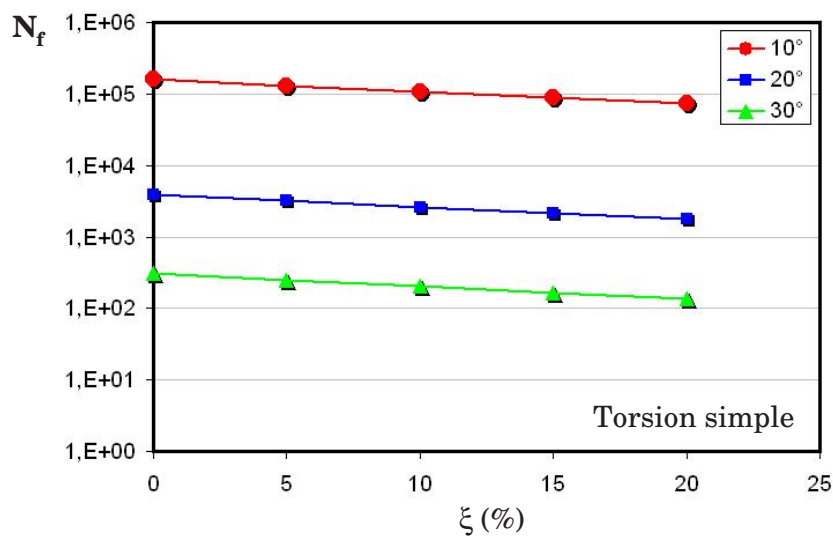
**Tab. 6.6:** Chute de la durée de vie en fonction de la variation de la rigidité du matériau en traction/torsion en-phase avec différentes elongations pour  $\theta = 30^\circ$ .

| $\phi$ | $\Delta N_f$                                 |
|--------|----------------------------------------------|
|        | $(\xi = 15\%, \theta = 30^\circ, \lambda=2)$ |
| 45°    | -47,66%                                      |
| 90°    | -48,18%                                      |
| 180°   | -48,21%                                      |

**Tab. 6.7:** Chute de la durée de vie en fonction de la variation de la rigidité du matériau en traction/torsion hors-phase avec différents angles de phase ( $\phi$ ).



**Fig. 6.45:** Chute de la durée de vie prédite en fonction de la variation de la rigidité du matériau en torsion simple.



**Fig. 6.46:** Durée de vie en en fonction de la variation de la rigidité du matériau en torsion simple.

## 6.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, différents exemples ont été considérés afin d'examiner la pertinence de notre grandeur prédictive développée dans le chapitre précédent. La première comparaison a été effectuée avec les résultats expérimentaux de [Roberts et Benzies \[1977\]](#). Il a été montré que les courbes  $\Sigma^*$  vs  $N_f$  obtenues en traction uniaxiale et en traction équibiaxiale se superposent relativement bien alors que les grandeurs classiques s'avèrent moins pertinentes. Ensuite, la capacité de notre grandeur à prendre en compte l'histoire du chargement (pour les chargements non-proportionnels) a été examinée en comparant les simulations avec les résultats expérimentaux de [Mars \[2001\]](#). Une partie de ce chapitre a été consacré à l'étude de la prédiction du phénomène de renforcement de la durée de vie observé dans les élastomères. Finalement, une étude concernant le rôle d'inhomogénéité dans la prédiction de la durée de vie a été proposée. Les résultats obtenus par notre théorie, qui restent à confirmer dans des situations plus complexes, n'en demeurent pas moins très prometteurs.





# Conclusion générale et perspectives

Le présent travail s'inscrit dans le cadre général de l'étude de la fatigue des matériaux élastomères. Ce sujet a fait l'objet de nombreuses études ces dernières années, le plus souvent afin de prédire la durée de vie des pièces industrielles, notamment automobiles, soumises à des sollicitations cycliques en service. L'objectif de la présente thèse était de proposer une grandeur mécanique permettant de prédire la durée de vie en fatigue des matériaux élastomères. Au début de cette étude (voir l'Introduction générale), nous avons établi les qualités qu'une telle grandeur doit posséder : (i) elle doit être capable de prédire à l'échelle macroscopique les phénomènes microscopiques d'endommagement en fatigue des élastomères, (ii) elle doit être théoriquement bien fondée et être exprimée en termes des grandeurs de la mécanique des milieux continus, (iii) elle doit être aisément implantable dans les outils de calcul industriels et finalement (iv) elle doit s'avérer indépendante du mode de déformation afin d'être utilisée avec confiance pour des problèmes multiaxiaux.

La première partie de ce mémoire a permis de rappeler les principaux résultats de la bibliographie en dressant notamment un état de l'art des études expérimentales et des grandeurs prédictives classiquement utilisées. De ce bilan, nous retiendrons deux résultats importants. En premier lieu, l'apparition de petites fissures de fatigue à l'échelle macroscopique est la conséquence de la propagation, à l'échelle microscopique, de défauts présents au sein du matériau. Ainsi, le choix d'une grandeur prédictive pour la durée de vie en fatigue nécessite la prise en compte de ce phénomène de propagation, ce qui conduit à critiquer l'utilisation de la déformation, de la contrainte ou de l'énergie de déformation comme grandeur prédictive. En second lieu, il apparaît que la grandeur prédictive la plus pertinente aujourd'hui est la *densité d'énergie de fissuration* (Cracking Energy Density, CED, en anglais) proposée par Mars [2002] récemment. En effet, celle-ci vise à prédire la croissance des micro-défauts qui peuplent le matériau. Cependant, le formalisme théorique utilisé par l'auteur nous paraît discutable.

La seconde partie du mémoire constitue le cœur de l'étude puisqu'elle est dédiée à la construction d'une nouvelle grandeur prédictive pour la fatigue des élastomères. Afin d'inscrire l'approche de Mars dans un cadre théorique bien établi, nous pensons que la mécanique configurationnelle introduite par Eshelby [1951] est l'outil approprié. Après les rappels théoriques sur la mécanique configurationnelle, nous avons donc exploité les propriétés du tenseur des contraintes configurationnelles. Ainsi, il a été démontré que la plus petite valeur propre de ce tenseur est une grandeur prédictive pertinente pour le problème, mais aussi que le vecteur propre qui lui est associé définit la direction normale au plan d'ouverture de la fissure potentielle. Ces résultats obtenus dans le cadre élastique ont été étendus au cas inélastique permettant notamment de prédire théoriquement le renforcement en fatigue observé pour des chargements de traction/traction. Finalement, deux méthodes de cumul au cours d'un cycle ont été proposées. Même si elles permettent d'obtenir des résultats intéressants (cas de la

traction/torsion déphasées), des travaux complémentaires seront nécessaires pour assurer la validité de notre approche dans le cas multiaxial non-proportionnel.

A notre avis, la contribution majeure de ces travaux sur la fatigue des élastomères est l'utilisation originale du tenseur des contraintes configurationnelles. En effet, comme nous l'avons montré lors de l'état de l'art relatif à la mécanique configurationnelle, la plupart des études utilisant cette théorie s'intéresse aux forces configurationnelles s'exerçant sur des singularités aussi diverses que des fissures, des dislocations, des inclusions ou des interfaces. Rares sont les travaux qui s'intéressent aux propriétés du tenseur proprement-dit et à sa signification physique.

Il convient à présent de s'interroger sur la validité de notre approche au regard des qualités que nous avons jugées indispensables pour une grandeur prédictive :

- (i) Notre approche est effectivement motivée par les phénomènes d'endommagement microscopiques puisque le tenseur des contraintes configurationnelles permet de quantifier les changements de microstructure du matériau et donc la croissance des micro-défauts ;
- (ii) A la différence de la densité d'énergie de fissuration précédemment mentionnée, les fondements théoriques qui nous ont permis de construire cette grandeur sont indiscutables, la mécanique configurationnelle en élasticité étant aujourd'hui bien établie ;
- (iii) Concernant les aspects numériques, il faut tout d'abord souligner que le tenseur des contraintes configurationnelles est aisément calculable en post-traitement d'une simulation éléments finis. Cependant nous n'avons pas étudié la mise en œuvre numérique de la méthode de cumul. A notre avis, celle-ci est complexe et nécessite des travaux complémentaires ;
- (iv) Les performances multiaxiales de notre approche ont été partiellement démontrées sur quelques problèmes analytiques. Évidemment, la validation complète de ce travail est fortement liée au point précédent : une fois l'implantation numérique effectuée, nous pourrions nous intéresser à des problèmes industriels complexes et valider complètement notre théorie.

Les travaux menés lors de ces trois années ouvrent évidemment plusieurs perspectives. A court terme, les développements numériques mentionnés précédemment sont indispensables et donc prioritaires. A plus long terme, la construction d'un *critère* pour la durée de vie en fatigue multiaxiale des matériaux élastomères devra être étudiée. Une fois la grandeur prédictive établie et validée, des critères pourront être proposés en comparant cette grandeur à des données expérimentales qui seront dépendantes du caoutchouc considéré. La question des grandeurs à mesurer et des méthodes à mettre en œuvre pour cela est donc posée. Pour conclure sur une perspective plus large, nous pensons que le travail qui a été mené ici doit conduire à s'interroger sur l'utilisation plus systématique de la mécanique configurationnelle comme un complément de la mécanique des milieux continus, notamment dans les nombreux cas où la compréhension des changements microstructuraux est indispensable à la modélisation macroscopiques des phénomènes.

# Bibliographie

- ABRAHAM, F., ALSHUTH, T. et JERRAMS, S. (2005). The effect of minimum stress and stress amplitude on the fatigue life of non strain crystallising elastomers. *Mat. Design*, 26:239–245.
- AGORA (2006). *Encyclopédie de l'Agora* (<http://agora.qc.ca/encyclopedie.nsf>).
- AHZI, S., MAKRAZI, A., GREGORY, R. V. et EDIE, D. D. (2003). Modeling of deformation behavior and strain-induced crystallization in poly (ethylene terephthalate) above the glass transition temperature. *Mech. Mat.*, 35:1139–1148.
- AMBACHER, H., STRAUB, M., KILIAN, N. G. U. et WOLFF, S. (1991). Reinforcement in filler loaded rubbers. *Kaut. Gummi Kunstst.*, 44.
- ANDRÉ, N., CAILLETAUD, G. et PIQUES, R. (1999). Haigh diagram for fatigue crack initiation prediction of natural rubber components. *Kautsch. Gummi Kunstst.*, 52:120–123.
- ANDRIYANA, A. et VERRON, E. (2006). Prediction of fatigue life improvement in natural rubber using configurational stress. *Int. J. Solids. Struct.* (in press).
- ARRUDA, E. M. et BOYCE, M. C. (1993). A three dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(2):389–412.
- ASHBY, M. F. et JONES, D. R. H. (1991). *Matériaux. 2. Microstructures et mise en œuvre*. Dunod, Paris.
- ATKINSON, C. et APARICIO, N. D. (1999). Fracture detection problems : applications and limitations of the energy momentum tensor and related invariants. *Int. J. Solids Struct.*, 36:4889–4899.
- AUER, E. E. et DOAK, K. W. (1958). Factors affecting laboratory cut-growth resistance of cold SBR tread stocks. *Rubber Chem. Technol.*, 31:185–201.
- BATHIAS, C., HOUEL, P., N'FALY BERETE, Y. et LE GORJU, K. (1998). Damage characterization of elastomeric composites using x-ray attenuation. In REIFSNIDER, K. L., DILLARD, D. A. et CARDON, A. H., éditeurs : *Fatigue and Fracture : Progress in durability analysis of composite systems*, pages 103–110. Balkema.
- BATHIAS, C., LE GORJU, K., LU, C. et MENABEU, L. (1997). Fatigue crack growth damage in elastomeric materials. In R. S. PIASCIK, J. C. N. et DOWLING, N. E., éditeurs : *Fatigue and fracture*, volume 27, pages 505–513. ASTM STP1296.

- BEATTY, J. R. (1964). Fatigue of rubber. *Rubber Chem. Technol.*, 37:1341–1364.
- BEATTY, M. F. (1987). Topics in finite elasticity : hyperelasticity of rubber, elastomers, and biological tissues - with examples. *Appl. Mech. Rev.*, 40(12):1699–1734.
- BECHIR, O., BOUFALA, K. et CHEVALIER, Y. (2002). Strain energy density function for carbon black filled rubber vulcanized for industrial applications - energie volumique de déformation du caoutchouc vulcanisé et renforcé au noir de carbone pour des applications industrielles. *Mécanique et industries*, 3:245–252.
- BERGSTRÖM, J. S. et BOYCE, M. C. (1998). Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *J. Mech. Phys. Solids*, 46(5):931–954.
- BIDERMAN, V. L. (1958). Calculations of rubber parts (en russe). *Rascheti na Prochnost*, page 40.
- BOUCHEREAU, M. N. (1997). Formulation des élastomères. Rapport technique, APOLLOR, INPL, LRCPP, FIRTEC.
- BRADEN, M. et GENT, A. N. (1960). The attack of ozone on stretched rubber vulcanizates. II. Conditions for cut growth. *J. Appl. Polym. Sci.*, 3(7):100–106.
- BUSFIELD, J. J. C., RATSIMBA, C. H. et THOMAS, A. G. (1997). Crack growth and strain induced anisotropy in carbon black filled natural rubber. *J. Nat. Rubber. Res.*, 12:131–141.
- CADWELL, M., MERRIL, R., SLOMAN, C. et YOST, F. (1940). Dynamic fatigue life of rubber. *Indus. and Engng Chem.*, 12(1):19–23.
- CANTOURNET, S. (2000). *Endommagement en fatigue des élastomères*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, France.
- CARREGA, M. (2000). *Matériaux polymères*. Dunod, Paris.
- CASAL, P. (1978). Interpretation of the Rice integral in continuum mechanics. *Lett. Appl. Eng. Sci.*, 16:335–347.
- CERMELLI, P., FRIED, E. et SELLERS, S. (2001). Configurational stress, yield and flow in rate-independent plasticity. *Proc. R. Soc. Lond.*, 457:1447–1467.
- CHADWICK, P. (1975). Applications of an energy-momentum tensor in non-linear elastostatics. *J. Elast.*, 5(3-4):249–258.
- CHAGNON, G. (2003). *Modélisation de l'effet Mullins dans les élastomères*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, France.
- CHAGNON, G., VERRON, E., GORNET, L., MARCKMANN, G. et CHARRIER, P. (2004). On the relevance of continuum damage mechanics as applied to the Mullins effect : theory, experiments and numerical implementation. *J. Mech. Phys. Solids*, 52:1627–1650.
- CHEREPANOV, G. P. (1967). The propagation of cracks in continuous media. *J. Appl. Math. Mech.*, 31:476–488.

- CHEREPANOV, G. P. (1968). Cracks in solids. *Int. J. Solids Struct.*, 4:811–831.
- CLEJA-TIGOIU, S. et MAUGIN, G. A. (2000). Eshelby's stress tensors in finite elastoplasticity. *Acta Mechanica*, 139:231–249.
- COLEMAN, B. et GURTIN, M. (1967). Thermodynamics with internal state variables. *Chem. Phys.*, 47(2):597 – 613.
- DANNENBERG, E. M. (1975). The effect of surface chemical interactions on the properties of filled-reinforced rubbers. *Rubber Chem. Technol.*, 48.
- DANNENBERG, E. M. (1982). Filler choice in the rubber industry. *Rubber Chem. Technol.*, 55:860.
- DE SOUZA NETO, E. A., PERIC, D. et OWEN, D. R. J. (1994). A phenomenological three-dimensional rate-independent continuum damage model for highly filled polymers : formulation and computational aspects. *J. Mech. Phys. Solids*, 42:1533–1550.
- DIZON, E. S., HICKS, A. E. et CHIRICO, V. E. (1974). The effect of carbon black parameters on the fatigue life of filled rubber compounds. *Rubber Chem. Technol.*, 47:231–249.
- DOI, M. (1996). *Introduction to Polymer Physics*. Oxford Science Publications, Oxford.
- DROZDOV, A. D. et DORFMANN, A. I. (2001). Stress-strain relations in finite viscoelastoplasticity of rigid-rod networks : applications to the Mullins effect. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 13:183–205.
- EHLERS, W. (2006). Continuum mechanics : Single and multiphase materials. Supplement to the COMMAS courses.
- EPSTEIN, M. et MAUGIN, G. A. (1990). The energy-momentum tensor and material uniformity in finite elasticity. *Acta Mechanica*, 83:127–133.
- EPSTEIN, M. et MAUGIN, G. A. (1996). On the geometrical material structure of anelasticity. *Acta Mechanica*, 115:119–131.
- ESHELBY, J. D. (1951). The force on an elastic singularity. *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, 244:87–112.
- ESHELBY, J. D. (1975). The elastic energy-momentum tensor. *J. Elast.*, 5(3-4):321–335.
- FIELDING, J. H. (1943). Flex life and crystallization of synthetic rubber. *Industrial and Engineering Chemistry*, 35:1259–1261.
- FLORY, P. J. (1944). Network structure and the elastic properties of vulcanized rubber. *Chem. Rev.*, 35:51–75.
- FLORY, P. J. et REHNER, J. (1943). Statistical mechanics of cross-linked polymer networks. *J. Chem. Phys.*, 11(11):512–520.

- GEHMAN, S. D. et CLIFFORD, R. P. (1954). Fatigue of rubber with two-way stretching. *Rubber World*, 131:365.
- GENT, A. N. (1978). *Strength of elastomers - Science and technology of rubber*. Academic Press.
- GENT, A. N. (1994). *Science and technology of rubber*, chapitre 10, page 471. New York : Academic Press, 2nd. édition.
- GENT, A. N., LINDLEY, P. B. et THOMAS, A. G. (1964). Cut growth and fatigue of rubbers. I. the relationship between cut growth and fatigue. *J. Appl. Polym. Sci.*, 8:455–466.
- GOVINDJEE, S. et SIMO, J. C. (1992). Mullins effect and the strain amplitude dependence of the storage modulus. *Int. J. Solids Struct.*, 29(14/15):1737–1751.
- GREEN, A. E. et ADKINS, J. E. (1960). *Large Elastic Deformations*. The Clarendon Press, Oxford.
- GREEN, M. S. et TOBOLSKY, A. V. (1946). A new approach for the theory of relaxing polymeric media. *J. Chem. Phys.*, 14:87–112.
- GREENSMITH, H. W. (1964). Rupture of rubber XI. Tensile rupture and crack growth in a noncrystallizing rubber. *J. Polym. Sci.*, 8:1113–1128.
- GROSS, D., KOLLING, S., MUELLER, R. et SCHMIDT, I. (2003). Configurational forces and their application in solid mechanics. *Eur. J. Mech. Solids A/Solids*, 22:669–692.
- GURTIN, M. E. (2000). *Configurational Forces as Basic Concept of Continuum Physics*. Springer, Berlin.
- GUTH, E. et MARK, H. (1934). Internal molecular statistics especially in chain molecules. *Monatsh. Chem.*, 65:93–121.
- HAINES, D. W. et WILSON, D. W. (1979). Strain energy density function for rubber like materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 27:345–360.
- HAMED, G. R. (1983). Effect of crosslink density on the critical flaw size of a simple elastomer. *Rubber Chem. Technol.*, 56:244–251.
- HOLZAPFEL, G. A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics. A continuum approach for engineering*. J. Wiley and Sons, Chichester.
- HUBER, N. et TSAKMAKIS, C. (2000). Finite deformation viscoelasticity laws. *Mech. Mat.*, 32:1–18.
- ISHIHARA, A., HASHITSUME, N. et TATIBANA, M. (1951). Statistical theory of rubber-like elasticity IV. (two dimensional stretching). *J. Chem. Phys.*, 19:1508–1512.
- JAMES, A. G., GREEN, A. et SIMPSON, G. M. (1975). Strain energy functions of rubber. I. characterization of gum vulcanizates. *J. Appl. Polym. Sci.*, 19:2033–2058.

- JAMES, H. M. et GREEN, A. (1975). Strain energy functions of rubber. II-the characterization of filled vulcanizates. *J. Appl. Polym. Sci.*, 19:2319–2330.
- JAMES, H. M. et GUTH, E. (1943). Theory of the elastic properties of rubber. *J. Chem. Phys.*, 11:455–481.
- KAUSCH, H. H., HEYMANS, N., PLUMMER, C. J. et DECROLY, P. (2001). *Matériaux Polymères : propriété mécaniques et physiques. Principes de mise en œuvre*. Le Traité des Matériaux en Vingt Volumes. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, Suisse.
- KIENZLER, R. et HERRMANN, G. (1997). On the properties of the Eshelby tensor. *Acta Mechanica*, 125:73–91.
- KIENZLER, R. et HERRMANN, G. (2000). *Mechanics in Material Space*. Springer, Berlin.
- KIENZLER, R. et HERRMANN, G. (2002). Fracture criteria based on local properties of the Eshelby tensor. *Mech. Res. Commun.*, 29:521–527.
- KLÜPPEL, M. et SCHRAMM, J. (2000). A generalized tube model of rubber elasticity and stress softening of filler reinforced elastomers systems. *Macromol. Theor. Sim.*, 9:742–754.
- KUHN, W. et GRÜN, F. (1942). Beziehungen zwischen elastischen Konstanten und Dehnungsdoppelbrechung hochelastischer Stoffe. *Kolloideitschrift*, 101:248–271.
- LAKE, G. J. et LINDLEY, P. B. (1964a). Cut growth and fatigue of rubber. II. experiments on a noncrystallizing rubber. *J. Appl. Polym. Sci.*, 8:455–466.
- LAKE, G. J. et LINDLEY, P. B. (1964b). Ozone cracking, flex cracking, and fatigue of rubber. part two. *Rubber J.*, 146:30–39.
- LAKE, G. J. et LINDLEY, P. B. (1965). The mechanical fatigue limit of rubber. *J. Appl. Polym. Sci.*, 9:1233–1251.
- LE CAM, J. B. (2005). *Endommagement en fatigue des élastomères*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, France.
- LE CAM, J.-B., HUNEAU, B., VERRON, E. et GORNET, L. (2004). Mechanism of fatigue crack growth in carbon black filled natural rubber. *Macromolecules*, 37:5011–5017.
- LEE, E. H. (1969). Elastic-plastic deformation at finite strain. *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, 36:1–6.
- LINDLEY, P. (1972). Energy for crack growth in model rubber components. *J. Strain Analysis*, 7:132–140.
- LINDLEY, P. (1974). Non-relaxing crack growth and fatigue in a non-crystallizing rubber. *Rubber Chem. Technol.*, 47:1253–1264.
- LION, A. (1996). A constitutive model for carbon black filled rubber : experimental investigations and mathematical representation. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 8:153–169.

- LION, A. (1997). On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. *J. Mech. Phys. Solids*, 45:1805–1834.
- LU, C. (1991). *Etude du comportement mécanique et des mécanismes d'endommagement des élastomères en fatigue et en fissuration par fatigue*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, France.
- MARCKMANN, G., VERRON, E., GORNET, L., CHAGNON, G., CHARRIER, P. et FORT, P. (2002). A theory of network alteration for the Mullins effect. *J. Mech. Phys. Solids*, 50:2011–2028.
- MARS, W. V. (2001). *Multiaxial fatigue of rubber*. Thèse de doctorat, University of Toledo.
- MARS, W. V. (2002). Cracking energy density as a predictor of fatigue life under multiaxial conditions. *Rubber Chem. Technol.*, 75:1–17.
- MARS, W. V. et FATEMI, A. (2002). A literature survey on fatigue analysis approaches for rubber. *Int. J. Fatigue*, 24:949–961.
- MAUGIN, G. A. (1993). *Material Inhomogeneities in Elasticity*. Chapman and Hall, London.
- MAUGIN, G. A. (1995). Material forces : Concepts and applications. *Appl. Mech. Rev.*, 48(5).
- MAUGIN, G. A. (2000). Towards an analytical mechanics of dissipative materials. *Geom. Cont. Micros II*, 58(2):171–180.
- MAUGIN, G. A. (2002a). Material mechanics of materials. *Theor. Appl. Mech.*, 27:1–12.
- MAUGIN, G. A. (2002b). Remarks on the Eshelbian thermomechanics of materials. *Mech. Res. Commun*, 29:537–542.
- MAUGIN, G. A. (2003). Pseudo-plasticity and pseudo-inhomogeneity effects in material mechanics. *J. Elasticity*, 71:81–103.
- MAUGIN, G. A. (2006). On canonical equations of continuum thermomechanics. *Mech. Res. Commun.*, 33:705–710.
- MAUGIN, G. A. et EPSTEIN, M. (1998). Geometrical material structure of elastoplasticity. *Int. J. Plasticity*, 14:109–115.
- MAUGIN, G. A. et TRIMARCO, C. (1992). Pseudomomentum and material forces in nonlinear elasticity : variational formulations and application to brittle fracture. *Acta Mechanica*, 94:1–28.
- MAYER, J. E. et MAYER, M. G. (1940). *Statistical Mechanics*. J. Wiley and Sons.
- MENZEL, A. et STEINMANN, P. (2005). A note on material forces in finite inelasticity. *Arch. Appl. Mech.*, 74:800–807.
- MEYER, K. H. et FERRI, C. (1935). Sur l'élasticité du caoutchouc. *Helvetica Chimica Acta*, 18:570–589.



- MIEHE, C. (1995). Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 14(5):697–720.
- MOONEY, M. (1940). A theory of large elastic deformation. *J. Appl. Phys.*, 11:582–592.
- MULLINS, L. (1948). Effect of stretching on the properties of rubber. *Rubber Chem. Technol.*, 21:281–300.
- MULLINS, L. (1969). Softening of rubber by deformation. *Rubber Chem. Technol.*, 42:339–362.
- NEGAHBAN, M. (2000). Modeling the thermomechanical effects of crystallization in natural rubber : I. the theoretical structure. *Int. J. Solids Struct.*, 37:2777–2789.
- OGDEN, R. W. (1972). Large deformation isotropic elasticity - On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proc. R. Soc. Lond.*, 326:565–584.
- OSTOJA-KUCZYNSKI, E. (2005). *Comportement en fatigue des élastomères : application aux structures antivibratoires pour l'automobile*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes.
- OSTOJA-KUCZYNSKI, E., CHARRIER, P., VERRON, E., MARCKMANN, G., GORNET, L. et CHAGNON, G. (2003). Crack initiation in filled natural rubber : experimental database and macroscopic observations. In BUSFIELD, J. et MUHR, A., éditeurs : *Constitutive Models for Rubber III*, pages 3–10. A.A. Balkema.
- PAYNE, A. R. et WHITTAKER, R. E. (1971). Low strain dynamic properties of filled rubbers. *Rubber Chem. Technol.*, 44:440–478.
- PEACH, M. O. et KOEHLER, J. S. (1950). Forces exerted on dislocations and the stress field produced by them. *Phys. Rev.*, 118:436–439.
- RAJAGOPAL, K. R. et SRINIVASA, A. R. (1998a). Mechanics of the inelastic behavior of materials. Part I : Theoretical underpinnings. *Int. J. Plasticity*, 14:945–967.
- RAJAGOPAL, K. R. et SRINIVASA, A. R. (1998b). Mechanics of the inelastic behavior of materials. Part II : Inelastic response. *Int. J. Plasticity*, 14:969–995.
- RAJAGOPAL, K. R. et SRINIVASA, A. R. (2005). On the role of the Eshelby energy-momentum tensor in materials with multiple natural configurations. *Math. Mech. Solids*, 10:3–24.
- RAJAGOPAL, K. R. et WINEMAN, A. S. (1992). A constitutive equation for nonlinear solids which undergo deformation induced by microstructural changes. *Int. J. Plast.*, 8:385–395.
- RAO, I. J. (2003). Effect of the rate of deformation on the crystallization behavior of polymers. *Int. J. Non-linear Mech.*, 38:663 – 676.
- RICE, J. R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.*, 35:379–386.
- RIGBI, Z. (1980). Reinforcement of rubber by carbon black. *Adv. Polym. Sci.*, 36(21).

- RIVLIN, R. S. (1948). Some topics in finite elasticity I. Fundamental concepts. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 240:459–490.
- RIVLIN, R. S. et THOMAS, A. G. (1953). Rupture of rubber. I. Characteristic energy for tearing. *J. Polym. Sci.*, 10:291–318.
- RO, H. S. (1989). *Modeling and interpretation of fatigue failure initiation in rubber related to pneumatic tires*. Thèse de doctorat, Purdue University, USA.
- ROACH, J. F. (1982). *Crack growth in elastomers under biaxial stresses*. Thèse de doctorat, University of Akron, USA.
- ROBERTS, B. J. et BENZIES, J. B. (1977). The relationship between uniaxial and equibiaxial fatigue in gum and carbon black filled vulcanizates. *Proceedings of Rubbercon'77*, vol. 2, pages 2.1–2.13.
- ROBISSON, A. (2000). *Comportement mécanique d'un élastomère chargé en silice. Etude de l'influence des charges et modélisation par une loi visco-hyperélastique endommageable*. Thèse de doctorat, Ecole de Mines de Paris, France.
- SAINTIER, N. (2000). *Prévisions de la durée de vie en fatigue du NR sous chargement multiaxial*. Thèse de doctorat, Ecole de Mines de Paris, France.
- SARAVANAN, U. et RAJAGOPAL, K. R. (2003). On the role of inhomogeneities in the deformation of elastic bodies. *Math. Mech. Solids*, 8:349–376.
- SIDOROFF, F. (1974). Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. *J. de Mécanique*, 13:679–713.
- SIDOROFF, F. (1982). Cours sur les grandes déformations. rapport GRECO, Ecole d'été Sophia-Antipolis.
- STEINMANN, P. (2000). Application of material forces to hyperelastostatic fracture mechanics. I. Continuum mechanical setting. *Int. J. Solids Struct.*, 37:7371–7391.
- STEINMANN, P. (2002). On spatial and material settings of thermo-hyperelastodynamics. *J. Elasticity*, 66:109–157.
- SVENSSON, S. (1981). Testing methods for fatigue properties of rubber materials and vibration isolators. *Polymer Testing*, 2:161–174.
- THOMAS, A. G. (1958). Rupture of rubber V. cut growth in natural rubber vulcanizates. *J. Polym. Sci.*, 31:467–480.
- TOKI, S., FUJIMAKI, T. et OKUYAMA, M. (2000). Strain-induced crystallization of natural rubber as detected real-time by wide-angle X-ray diffraction technique. *Polymer*, 41:5423 – 5429.
- TRABELSI, S., ALBOUY, P. et RAULT, J. (2003a). Crystallization and melting processes in vulcanized stretched natural rubber. *Macromolecules*, 36(20):7624–7639.

- TRABELSI, S., ALBOUY, P. et RAULT, J. (2003b). Stress-induced crystallization properties of natural and synthetic cis-polyisoprene. *Rubber. Chem. Technol.*, 77:303–316.
- TRELOAR, L. R. G. (1943). The elasticity of a network of long chain molecules (I and II). *Trans. Faraday Soc.*, 39:36–64 ; 241–246.
- TRELOAR, L. R. G. (1944). Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation. *Trans. Faraday Soc.*, 40:59–70.
- TRELOAR, L. R. G. (1975). *The Physics of Rubber Elasticity*. Oxford University Press, Oxford.
- TSCHOEGL, N. W. (1971). Constitutive equations for elastomers. *J. Polymer Sci.*, 9:1959–1970.
- VERRON, E. (2003). Modélisation du comportement des structures et des matériaux élastomères. *HDR - Ecole Centrale de Nantes*.
- VERRON, E. (2005). Prediction of fatigue crack initiation in rubber with the help of configurational mechanics. In AUSTRELL, P. E. et KARI, L., éditeurs : *Constitutive Models for Rubber IV*, pages 3–8. A. A. Balkema.
- VERRON, E., LE CAM, J. B. et GORNET, L. (2006). A multiaxial criterion for crack nucleation in rubber. *Mech. Res. Commun.*, 33:493–498.
- WÖHLER, A. (1867). Wöhler experiments on the strength of metals. *Engineering*, 2:160.
- WU, P. D. et VAN DER GIESSEN, E. (1993). On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(3):427–456.
- XIE, J. (1992). *Etude de la fatigue et de la rupture des assemblages collés composite-élastomère*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, France.
- YEOH, O. H. (1990). Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates. *Rubber Chem. Technol.*, 63(5):792–805.

## Résumé

### Définition d'une nouvelle grandeur prédictive pour la durée de vie en fatigue des matériaux élastomères

Ces dernières années, de nombreux progrès ont été faits dans le domaine de la simulation numérique de pièces en élastomère. Ces avancées sont en grande partie motivées par la nécessité d'améliorer les délais et les coûts de conception dans des domaines industriels fortement compétitifs, et notamment pour les pièces anti-vibratoires automobiles. Dans ce contexte, si les logiciels classiques de type éléments finis sont capables de prédire efficacement l'histoire des déformations et des contraintes au sein des pièces, la prédiction de la durée de vie de celles-ci en fatigue reste un problème ouvert.

Le processus de rupture par fatigue dans les élastomères se fait en deux phases : une première phase d'initiation durant laquelle des micro-fissures apparaissent au sein du matériau, puis une phase de propagation durant laquelle ceux-ci croissent jusqu'à la rupture. Des travaux récents ont démontré que la première phase est prédominante pour la fin de vie des pièces anti-vibratoires. Ainsi, la construction d'une grandeur prédictive efficace doit être capable de déterminer les zones propices à l'apparition de micro-défauts au sein d'une pièce. Les trois grandeurs prédictives classiquement utilisées pour estimer la durée de vie en fatigue des élastomères sont la déformation principale maximale, la contrainte principale maximale et l'énergie de déformation. Si celles-ci s'avèrent efficaces pour des cas de chargement uniaxiaux, leur utilisation pour des cas de chargement multiaxiaux pose problème.

Afin de prédire la rupture en fatigue des pièces élastomères en service, une grandeur prédictive efficace dans le domaine multiaxial est nécessaire. Celle-ci doit être indépendante du mode de déformation, motivée par la physique des phénomènes mis en jeu, théoriquement bien fondée et finalement aisément implantable dans les outils numériques. La présente thèse propose de construire une telle grandeur. Des observations expérimentales réalisées préalablement et permettant de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu nous ont conduit à considérer le tenseur des contraintes configurationnelles établi par Eshelby en 1951. Dans le domaine élastique, le nouveau prédicteur proposé est la plus petite valeur propre de ce tenseur, la direction propre associée étant la direction normale au plan d'ouverture de la fissure. L'extension de ces travaux au cas inélastique est aussi développée. Afin de vérifier le bien-fondé de cette théorie, des données expérimentales classiques de la bibliographie ont été utilisées ; les résultats obtenus démontrent l'efficacité de notre approche notamment pour unifier les résultats multiaxiaux en fatigue.

**Mots-clés** : contrainte configurationnelle, élastomère, fatigue, initiation de fissure

**Discipline** : Science de l'ingénieur

## Abstract

### Formulation of a new fatigue life predictor for rubber

The last decade has experienced a major advance in the development of finite element based tools for the simulation of a wide range of industrial rubber parts. This is mainly motivated by the need to improve time and cost efficiencies in highly competitive industries particularly in automotive Anti-Vibration Systems (AVS) industry. While the basic concept of finite element method capable of predicting stress and strain histories has been well established, the use of these histories to estimate fatigue life of rubber parts in service remains a critical issue.

Typically, the fatigue failure process involves a period during which cracks nucleate in regions that were initially free of observed cracks, followed by a period during which nucleated cracks grow to the point of failure. For AVS, the former is the most important one. The three most widely used predictors for rubber crack nucleation are the maximum principal stretch, the maximum principal stress and the strain energy density. However, they fail to give satisfying prediction for multiaxial problems.

In order to prevent fatigue failure of rubber parts in service, an efficient and well-defined multiaxial fatigue life predictor is required, i.e. independent of deformation state, physically motivated, theoretically well-formulated and easy to implement into finite element software. Thus, the purpose of this study is to develop a new fatigue life predictor which can meet these requirements. Experimental observations were conducted to understand physical phenomena which take place during fatigue crack nucleation and growth in rubber. Based on these observations, we consider that the configurational stress tensor introduced by Eshelby in 1951 is an appropriate continuum mechanics quantity to develop a relevant fatigue life predictor. In elasticity, the new predictor is given by the smallest eigenvalue of this tensor and the normal of the crack plan is the eigenvector associated with the smallest eigenvalue. An extension to the case of inelasticity is also proposed. To verify its efficiency, experimental data issued from the literature are considered. Results demonstrate that the proposed predictor is capable of unifying multiaxial fatigue data.

**Keywords** : configurational stress, rubber, fatigue, crack initiation

**Major** : Applied Mechanics